

Szabályozástechnika 35.

Állapotirányítás, állapotirányítás megfigyelővel, optimális (LQR) irányítás – 5.

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencé

Folytatva az állapotviszacsatolás témakörének tárgyalását megmutatjuk, hogy az A állapotmátrixával (melynek sajátértékei a λ tényezők) és a B bemeneti mátrixával leírt lineáris SISO folyamat $x(t)$ állapotvektorának az F átviteli tényezőn (sorvektoron) át az $u(t)$ bemenetre történő negatív visszacsatolásával keletkező eredő rendszer átviteli mátrixa $A_R = A - BF$. Ennek λ_R sajátértékei az F visszacsatolási tényező megválasztásával szabadon előírhatók, így módon a visszacsatolt rendszer $\exp(\lambda_R t)$ szerint lejátszódó tranzienseire befolyást gyakorolhatunk. Ha a folyamat $\exp(\lambda t)$ tranzienseinek időtartamát rövidíteni szándékozunk ($\lambda_R \ll \lambda < 0$), akkor a jelentős mértékű túlvezérlés kialakulását is számításba kell vennünk.

A folyamat n fokszámú karakterisztikus egyenlete és ennek a p_i gyökeivel (a $W_p(s)$ pólusaival) felírt gyöktényezős alakja:

$$\det(\lambda I - A) = H_p(\lambda) = \lambda^n + h_1 \lambda^{n-1} + \dots + h_{n-1} \lambda + h_n = (\lambda - p_1)(\lambda - p_2) \dots (\lambda - p_n) = 0.$$

Az állapotviszacsatolással a folyamat $x(t)$ állapotváltozóit a bemenetre negatív visszacsatolással vezetjük vissza, a visszacsatolójel az állapotváltozók súlyozott lineáris kombinációja: $e(t) = f_1 x_1(t) + f_2 x_2(t) + \dots + f_n x_n(t) = Fx(t)$. Az állapotviszacsatolt rendszer bemenőjele $u_a(t)$ alapjel, a folyamat bemenőjele $u(t) = k_c u_a(t) - e(t) = k_c u_a(t) - Fx(t)$ különbségjel. Mivel u_a és u skaláris mennyiségek, az $e(t) = Fx(t)$ is skaláris, amiből az következik, hogy az F visszacsatolás átviteli tényezője sorvektor. Ennek megfelelően

$$e(t) = Fx(t) = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = f_1 x_1(t) + f_2 x_2(t) + \dots + f_n x_n(t).$$

Az állapotváltozók visszacsatolásával kialakított rendszer struktúrája az 1. ábrán látható.

Ennek a struktúrának ismérve, hogy az $u(t) = k_c u_a(t) - Fx(t)$ irányítójelet előállító alrendszere (az irányító alrendszer) – szemben például a soros kompenzációs PIPD-szabályozóval – kizárólag *algebrai* (időkésleltetés nélküli *arányos* (P) és *összegző* (Σ)) tagokat tartalmaz (1. ábra). Az állapotviszacsatolt rendszer állapotegyenlete a hatásvázlat alapján:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \underbrace{(A - BF)}_{A_R} x(t) + \underbrace{Bk_c}_{B_R} u_a(t) \\ y(t) = Cx(t).$$

Az eredő rendszer hatásvázlata és $A_R = A - BF$ eredő állapotmátrixának (az F átviteli tényező sorvektorától függő és méretezési előírásnak is tekinthető) sajátértékei a 2. ábrán szemléltetjük¹. Az u_{a0} = állandó bemenőjel esetében – az aszimptotikusan stabilis rendszer állandósult állapotában – az állapotsebesség értéke zérus, ezért ebben a határhelyzetben

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=\infty} = (A - BF)x(\infty) + Bk_c u_{a0} = 0.$$

Az állapotvektor és a kimenőjel állandósult értéke $x(\infty) = x_0 = -(A - BF)^{-1} Bk_c u_{a0}$, $y(\infty) = y_0 = Cx_0$. A rendszer k_R átviteli tényezője (dc -erősítése) ennek megfelelően:

$$y_0 = Cx_0 = -C(A - BF)^{-1} Bk_c u_{a0} = k_R u_{a0} \\ k_R = -C(A - BF)^{-1} Bk_c = y_0 / u_{a0}.$$

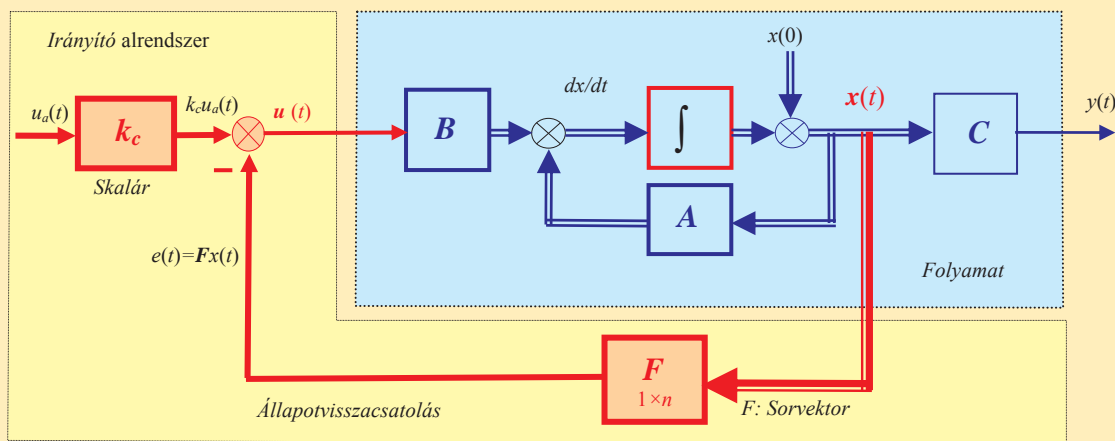
Az F visszacsatoló vektor számítása a rendszer előírt p_{Ri} póluselozslása mellett

A folyamat $H_p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$ karakterisztikus egyenletének gyökei a p_1, p_2, \dots, p_n pólusok, míg az állapotviszacsatolt rendszer $H_R(\lambda) = \det[\lambda I - (A - BF)] = 0$ karakterisztikus egyenletének a gyökei a **méretezési előírásnak megfelelő** $p_{R1}, p_{R2}, \dots, p_{Rn}$ pólusok. Az állapotviszacsatolt rendszer karakterisztikus egyenlete és ennek a p_{Ri} pólusaival felírt gyöktényezős alakja:

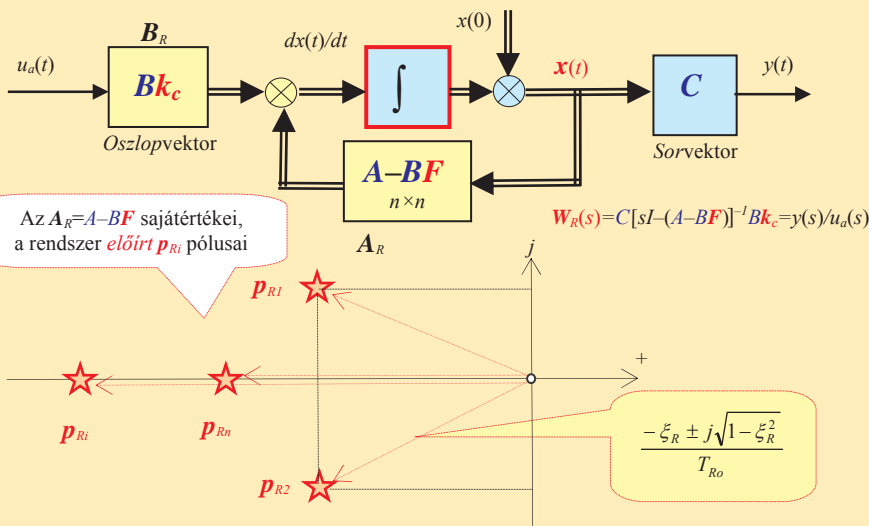
$$\det[\lambda I - (A - BF)] = H_R(\lambda) = \lambda^n + h_R \lambda^{n-1} + \dots + h_{R(n-1)} \lambda + h_{Rn} = (\lambda - p_{R1})(\lambda - p_{R2}) \dots (\lambda - p_{Rn}) = 0.$$

Ebből a kifejezésből az is következik – ha a p_{Ri} pólusok *méretezési előírások* –, hogy a rendszer $H_R(\lambda)$ karakterisztikus egyenle-

¹ Ez az ábra azt mutatja, hogy a folyamat eredeti p_i pólusait (amelyek között labilitást eredményező pólus is lehet) az állapotviszacsatolással a tetszőleges helyre előírt p_{Ri} pólusokra „serélhetjük”. Ezeket úgy célszerű megválasztani, hogy a visszacsatolt rendszer aszimptotikusan stabilis ($real(p_{Ri}) < 0$) és kellően gyors ($real(p_{Ri}) \ll 0$) legyen. Természetesen – miután a p_{Ri} pólusok szabadon előírhatók – stabilis rendszerből labilis rendszer is előállítható. Ennek tipikus, a gyakorlati megoldásokban is alkalmazott esete, amikor is pl. az egytárolós, arányos tagból állapotviszacsatolással integráló tagot hozunk létre.



1. ábra A folyamat $x(t)$ állapotváltozóinak negatív visszacsatolása



2. ábra Az eredő állapotvisszacsatolt rendszer hatásvázlata és előírt p_{Ri} pólusai

tének h_{Ri} együtthatói is adottnak tekinthetők². A rendszer p_{Ri} pólusai az F visszacsatolástól is függenek, tehát ha a p_{Ri} pólusok (ill. a h_{Ri} együtthatók) adottak, akkor ezek ismeretében az F elvileg meghatározható. Az általános esetre érvényes eljárást az F visszacsatoló vektor meghatározására Ackermann dolgozta ki. A $H_R(\lambda)$ p_{Ri} pólusainak előzetes felvétele alapján az F sorvektor meghatározására szolgáló – itt nem levezetett – formula (Ackermann-képlet³):

$$F = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] C_0^{-1} H_R(A)$$

Ebben:

$$[0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$$

: az $n \times n$ méretű egységmátrix utolsó sora,

$$C_0 = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

: a folyamat A, B paramétermátrixaiból összeállított irányíthatósági hipermátrix,

$$H_R(A) = A^n + h_{R1}A^{n-1} + \dots + h_{R(n-1)}A + h_{Rn}I$$

: a visszacsatolt rendszer $H_R(\lambda)$ karakterisztikus polinomja $\lambda = A$ helyettesítéssel.

Ha az állapotvisszacsatolással kialakított eredő rendszer k_R átviteli tényezőjét a folyamat eredeti k_p átviteli tényezőjével azonosra kívánjuk megválasztani, akkor a

2 Vegyük figyelembe a p_{Ri} gyökök és a h_{Ri} együtthatók közötti összefüggést (pl. $h_{Rn} = (-p_{R1})(-p_{R2}) \dots (-p_{Rn})$ stb.).

3 Az Ackermann-formulában a folyamat A, B paramétermátrixai és a visszacsatolt rendszer karakterisztikus egyenletének h_{Ri} együtthatói ismert adatok. MATLAB-támogatással MIMO-folyamatra: $F = \text{place}(A, B, pR)$, vagy SISO-folyamatra: $F = \text{acker}(A, B, pR)$. Irodalom: Ackermann: Der Entwurf linearer Regelungssysteme im Zustandsraum. Regelungstechnik 20. 1972.

$$k_p = -CA^{-1}B = -C(A-BF)^{-1}Bk_c = k_r$$

feltételből a k_c átviteli (erősítési) tényező értéke⁴:

$$k_c = [C(A-BF)^{-1}B]^{-1} CA^{-1}B.$$

MATLAB-támogatással SISO-rendszerre (ekkor B oszlopvektor):

```
A=input('A='); B=input('B='); C=input('C=');
pR=input('pR=');
F=acker(A,B,pR);
kC=inv(C*inv(A-B*F)*B)*C*inv(A)*B;
disp(F); disp(kC);
```

Az u_t túlvezérlési arány számítása

Az állapotvisszacsatolás alkalmazásával általában az az elérendő célkitűzés, hogy az önbeálló folyamat „lassú” transzienseit okozó $p_i < 0$ pólusait a rendszer $p_{Ri} \ll p_i < 0$ pólusaira „cseréljük” fel⁵. Ez az állapotvisszacsatolt rendszer (a folyamathoz képesti) gyorsabb működését eredményezi. A gyorsítás azonban a fizikai valóság körülményei között a folyamat $u(t)$ bemenőjelének túlvezérlésével történik, aminek technológia szabta korlátai vannak. Az $u_a(t) = u_{a0} \mathbf{1}(t)$ bemenőjelnél a stabilis rendszer $u(t)$ irányítójelének $u(0)$ és $u(\infty)$ értékeiből származtatható az $u_t = u(0)/u(\infty)$ túlvezérlési arány. Részletezve⁶:

$$u(0) = k_c u_a(0) - Fx(0) = k_c u_a(0) - 0 = k_c u_{a0}$$

$$u(\infty) = k_c u_a(\infty) - Fx(\infty) = k_c u_{a0} - Fx(\infty),$$

$$\text{de } \rightarrow x(\infty) = -(A-BF)^{-1} B k_c u_{a0}.$$

Ezért

$$u(\infty) = k_c u_{a0} - Fx(\infty) = k_c u_{a0} + F(A-BF)^{-1} B k_c u_{a0} = [1 + F(A-BF)^{-1} B] k_c u_{a0}.$$

Az innen kapható túlvezérlési arány⁷:

$$\frac{u(0)}{u(\infty)} = u_t = [1 + F(A-BF)^{-1} B]^{-1} = \frac{h_{Rn}}{h_n} = \prod_{i=1}^n \frac{p_{Ri}}{p_i}.$$

A túlvezérlés jelenségét az irányítójel ábrázolásával a 3. ábra szemlélteti.

Az $u(0)/u(\infty)$ túlvezérlési arány értékét a p_{Ri}/p_i „pólusáthelyezési arányok” szorzatai szabják meg, ezért a gyorsítás mértékének megválasztásakor körültekintően kell eljárni. A folyamat egyébként is „gyors” ($real(p_i) \ll 0$) pólusait tovább „gyorsítani” nem célszerű, mert ennek hozadéka nem jelentős, a túlvezérlést viszont indokolatlanul növeli⁸ (általában $|p_{Ri}| > |p_i|$).

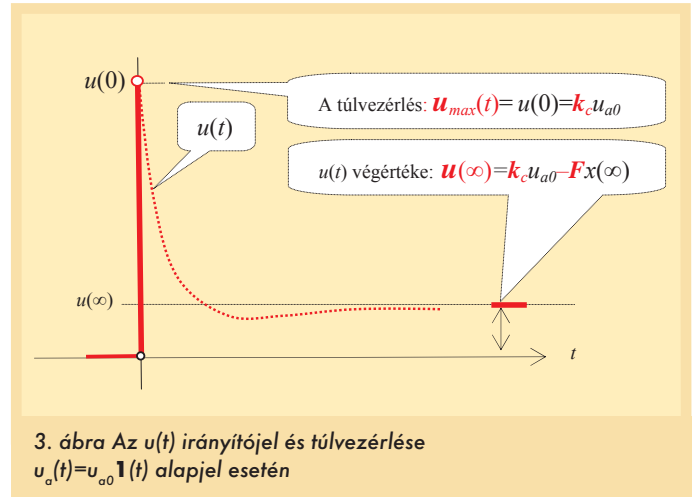
4 A k_r átviteli tényezőt $k_r = 1$ értékre is választhatjuk, ekkor $y(\infty) = u_{a0}$ és $k_c = [-C(A-BF)^{-1}B]^{-1}$. A k_c értékének meghatározását meg kell előznie az F átviteli tényező sorvektorának a kiszámítása.

5 Ritkábban az is előfordul, hogy a folyamat labilis ($p \geq 0$) pólusát stabilis pólusra ($p_R < 0$) kell cserélnünk (stabilizálás), vagy stabilis pólust ($p < 0$) az origóba ($p_R = 0$) kell helyeznünk (pl. integráló tag létrehozása).

6 Az állapotváltozók integráló tagok kimenőjelei, ezért a $t=0$ időpontban a véges bemenőjel hatására nem változhatnak, vagyis az állapotvektor értéke a $t=0$ időpontban $x(0)=0$.

7 Vegyük figyelembe a polinomok gyökei és együttthatói között lévő $h_{Rn} = (-p_{R1}) \dots (-p_{Rn})$ és $h_n = (-p_1) \dots (-p_n)$ összefüggéseket. **MATLAB**-támogatással: $u_t = \text{inv}(1 + F * \text{inv}(A - B * F) * B)$.

8 A túlvezérlés mérséklésére előfordulhat, hogy a folyamat nagyon gyors transzienseket eredményező pólusait (amelyek a szabályozási területre egyébként jelentéktelen befolyást gyakorolnak), csökkentésük helyett növeljük.



3. ábra Az $u(t)$ irányítójel és túlvezérlése $u_a(t) = u_{a0} \mathbf{1}(t)$ alapjel esetén

Példa

Legyen az önbeálló, harmadrendű folyamat $W_p(s)$ átviteli függvénye az alábbi:

$$W_p(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G_p(s)}{H_p(s)} = \frac{g_3}{s^3 + h_1 s^2 + h_2 s + h_3} = \frac{g_3}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

($h_0 = 1, h_1 = 6, h_2 = 11, h_3 = 6, g_3 = 6, p_1 = -1, p_2 = -2, p_3 = -3$). Az állapotvisszacsatolás alkalmazásával kialakított rendszer előírt p_{Ri} pólusaira vonatkozó követelmény⁹: $p_{R1} = -3, p_{R2} = -6, p_{R3} = -9$. Az eredő rendszer karakterisztikus polinomja ennek megfelelően:

$$\det[\lambda I - (A - BF)] = H_R(\lambda) = (\lambda - p_{R1})(\lambda - p_{R2})(\lambda - p_{R3}) = (\lambda + 3)(\lambda + 6)(\lambda + 9) = \lambda^3 + h_{R1} \lambda^2 + h_{R2} \lambda + h_{R3} = \lambda^3 + 18 \lambda^2 + 99 \lambda + 162$$

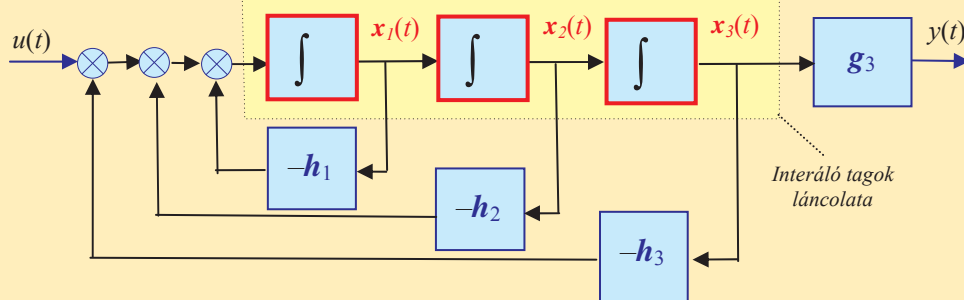
($h_{R0} = 1, h_{R1} = 18, h_{R2} = 99, h_{R3} = 162$). Ezen túlmenően legyen a visszacsatolt rendszer k_r átviteli tényezője azonos a folyamat eredeti k_p átviteli tényezőjével: $k_r = k_p = g_3/h_3 = 6/6 = 1$. A folyamat állapotegyenlete és az alaptagokból felépített hatásvázlata (4. ábra):

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + h_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + h_2 \frac{dy(t)}{dt} + h_3 y(t) = g_3 u(t)$$

$$\frac{1}{g_3} \frac{d^3 y(t)}{dt^3} = -\frac{h_1}{g_3} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - \frac{h_2}{g_3} \frac{dy(t)}{dt} - \frac{h_3}{g_3} y(t) + u(t).$$

A hatásvázlat alapján – annak jelöléseivel – a folyamat állapotegyenlete:

9 A folyamat p_i pólusait az állapotvisszacsatolással eredeti értékeik háromszorosára kívánjuk mintegy „áthelyezni” ($p_{Ri} = 3p_i$), annak érdekében, hogy a transziensek $exp(p_i t)$ helyett $exp(3p_i t) = exp(p_i t)$ szerint alakuljanak. Ezzel a jelkésletetésre jellemző lineáris szabályozási területet is a harmadára csökkenthetjük.



4. ábra A folyamat átviteli függvényének közvetlen felbontásából származtatott hatásvázlat

Az állapotviszacsatolt rendszer \mathbf{P} , \mathbf{I} és Σ lineáris *alaptagokat* tartalmazó hatásvázlatát úgy kaphatjuk meg, hogy a folyamat irányíthatósági kanonikus alakjának megfelelő mindegyik $x_i(t)$ állapotváltozót (az f_i átviteli tényezőn keresztül) a bemenetre negatívan visszacsatoljuk. Ezzel – miután a folyamat az irányíthatósági kanonikus alakjában definiált – a $-h_1$ és f_1 , a $-h_2$ és f_2 , valamint a $-h_3$ és f_3 átviteli tényezővel rendelkező arányos visszacsatoló tagok *párhuzamos* kapcsolást alkotnak, ezért az eredő rendszer hatásvázlatán is

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -h_1x_1(t) - h_2x_2(t) - h_3x_3(t) + u(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_1(t) \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= x_2(t) \\ y(t) &= g_3x_3(t), \end{aligned}$$

az integrálótagok láncolata szerepel. (Mindez abból következik, hogy az első integráló alaptag bemenetén lévő összegzés sorrendisége – anélkül, hogy ez az első integrátor bemenő jelének megváltozásával járna – szabadon felcserélhető.) Az átalakított hatásvázlaton az integrátorlánc állapotváltozói a $h_{R1} = -(h_1 + f_1)$, a $h_{R2} = -(h_2 + f_2)$ és a $h_{R3} = -(h_3 + f_3)$ eredő átviteli tényezővel rendelkező \mathbf{P} tagokkal visszacsatoltak, vagyis az eredő rendszer állapotegyenletei is az *irányíthatósági kanonikus* alakban írhatók fel.

$$A = \begin{bmatrix} -h_1 & -h_2 & -h_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad g_3] \quad D = 0,$$

Miután a folyamat – és az eredő állapotviszacsatolt rendszer is – az *irányíthatósági kanonikus alak* matematikai modelljével definiált (lásd integráló tagok láncolata), ez a számításokat (az f_i átviteli tényezők és a k_c erősítés meghatározását) jelentősen egyszerűsítheti. Az eredő rendszer állapotegyenlete és átviteli tényezője mindezek alapján:

$$k_p = -CA^{-1}B =$$

$$= -[0 \quad 0 \quad g_3] \cdot \begin{bmatrix} -h_1 & -h_2 & -h_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{g_3}{h_3}.$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -(h_1 + f_1)x_1(t) - (h_2 + f_2)x_2(t) - (h_3 + f_3)x_3(t) + k_c u(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_1(t) \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= x_2(t) \\ y(t) &= g_3x_3(t) \end{aligned}$$

A példa számadataival:

$$A_R = A - BF = \begin{bmatrix} -(h_1 + f_1) & -(h_2 + f_2) & -(h_3 + f_3) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_R = Bk_c = \begin{bmatrix} k_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_R = C = [0 \quad 0 \quad g_3] \quad D_R = D = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 0 \quad 6] \quad D = 0,$$

$$k_R = -C(A - BF)^{-1}Bk_c = \frac{k_c g_3}{h_3 + f_3}$$

$$k_p = -[0 \quad 0 \quad 6] \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{6}{6} = 1.$$

Nyomatékosan hangsúlyozzuk, hogy mivel a folyamatot állapotegyenletének irányíthatósági kanonikus alakjával jellemeztük, az állapotviszacsatolt rendszer matematikai modellje is ebben az alakban jön létre. A 4. ábra hatásvázlatával jellemzett folyamat állapotviszacsatolásával keletkező eredő rendszer hatásvázlatát a soron következő folytatásban részletezzük.

(Folytatjuk!)

szbela12@gmail.com
fjuhaszne@gmail.com