Szabályozástechnika 34.

Állapotirányítás, állapotirányítás megfigyelővel, optimális (LQR) irányítás – 4.

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencné

Az állapotvisszacsatolás témakörének folytatásaként egy, az átviteli függvényével jellemzett harmadrendű SISO-rendszernek vizsgáljuk az állapotirányíthatóságát és a megfigyelhetőségét. Egy áramköri illusztráció felhasználásával kiszámítjuk azt az irányítójelet, amely egy elsőrendű rendszer állapotváltozóját adott idő alatt egy megadott értékre állítja be. A pólusáthelyezés általános esetének tárgyalását megelőzően azt is szemléltetjük, hogy az állapotvisszacsatolás alkalmazásával az elsőrendű rendszer dinamikus tulajdonságait alapvetően befolyásoló pólusát a komplex számsík valós tengelyének tetszőleges pontjába áthelyezhetjük.

A $W_p(s)$ átviteli függvényű rendszer hatásvázlata alapján (az integráló alaptagok kimenőjeleit az adott *sorrendiséggel* állapotváltozóknak elnevezve) a harmadrendű folyamat[1] állapotegyenlete és karakterisztikus polinomja:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -h_1 & -h_2 & -h_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{D} u(t)$$

$$H_p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + h_1 & h_2 & h_3 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda^3 + h_1\lambda^2 + h_2\lambda + h_3 \,.$$

Példa

Adott az önbeálló, aszimptotikusan stabilis, harmadrendű folyamat $W_p(s)$ átviteli függvénye:

$$W_p(s) = \frac{G_p(s)}{H_p(s)} = \frac{g_3}{s^3 + h_1 s^2 + h_2 s + h_3} =$$

$$= \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} =$$

$$= \frac{k_p}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)} = \frac{1}{(1+s)(1+\frac{1}{2}s)(1+\frac{1}{3}s)} \,.$$

Határozzuk meg, hogy *állapotirányíthatók-e* és *megfigyelhetők-e* a folyamat $x_i(t)$ állapotváltozói?

$W_p(s)$ adataiból kiolvashatóan: $g_1=g_2=0$, $g_3=6$, ($h_0=1$), $h_1=6$, $h_2=11$, $h_3=6$. Ennek megfelelően az átviteli tényező $k_p=-CA^{-1}B$ $=g_3/h_3=1$. $W_p(s)$ pólusai $p_1=-1$, $p_2=-2$, $p_3=-3$, ill. időállandói $T_1=-1/p_1=1$, $T_2=-1/p_2=1/2$, $T_3=-1/p_3=1/3$. A lineáris szabályozási terület: $I_L=k_p(T_1+T_2+T_3)=1+1/2+1/3=11/6$. A folyamat átviteli függvényének a közvetlen felbontásból származtatható *A, B, C, D* paramétermátrixai:

$$A = \begin{bmatrix} -h_1 & -h_2 & -h_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = [0 \quad 0 \quad g_3] = [0 \quad 0 \quad 6] \qquad D = 0 \,.$$

Az állapotirányíthatóságot és a megfigyelhetőséget meghatározó mátrixok és ezek rangjai:

$$C_o = [B \; AB \; A^2B] =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -6 & 25 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$rang(C\ \ ) = 3 \,.$$

1 Ha az $n \geq 1$ rendszám *tetszőleges*, a hatásvázlat struktúrája és az állapotegyenlet kifejezése az $n=3$ esethez hasonló, de ekkor az *integrátorlánc n* számú **I** alaptagot tartalmaz, és az állapotmátrix mérete $n \times n$. Vegyük észre, hogy az irányíthatósági kanonikus alak állapotmátrixának első sorában a folyamat $H_p(s)$ karakterisztikus polinomjának $-h_1$, $-h_2$, $-h_3$ negatív együtthatói állnak, ill. minden visszacsatolás az első integrátor bemenetére kerül.

$$O_b = [C^T A^T C^T (A^T)^2 C^T] =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \right)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$rang(O_b) = 3 .$$

Miután a folyamat harmadrendű (n=3) és $rang(C_o)=n=3$, $rang(O_b)=n=3$, a folyamat **állapotirányítható** és **megfigyelhető**. Az *állapotirányíthatóság* azt jelenti, hogy létezik az adott ***A, B*** paramétermátrixokkal leírt folyamatnak olyan $u(t)$ bemenőjele, amelynek segítségével az állapotvektor egy meghatározott $t_v-t_0>0$ idő alatt egy adott $x(t_0)$ állapotából egy előírt $x(t_v)$ állapotába átvihető. Ennek az $u(t)$ bemenőjelnek a meghatározása a folyamat n rendszámától függően viszonylag komplikált – itt nem részletezett – eljárást igényel. Az *állapotmegfigyelhetőség* azt jelenti, hogy a folyamat $u(t)$ bemenőjelének és az ennek hatására keletkező $y(t)$ válasznak a $t_0<t<t_v$ időintervallumban történő ismeretében az állapotvektor $x(t_0)$ értéke meghatározható. Az $x(t_0)$ meghatározásának – szintén a folyamat n rendszámától függő és itt nem részletezett – viszonylag komplikált eljárása van. **MATLAB**-támogatással az irányíthatóság és megfigyelhetőség feltételeinek számításai lényegesen egyszerűbbek:

```
A=input('A=');B=input('B=');
C=input('C=');
Co=ctrb(A,B);Ob=obsv(A,C);
disp([rank(Co) rank(Ob)];
```

Általánosságban is levezethető[2] a következő tétel:

Ha egy lineáris, dinamikus **SISO**-folyamat $W_p(s)=G_p(s)/H_p(s)$ átviteli függvényében pólus–zérus megegyezés van, akkor a folyamat az állapotváltozók megválasztásától függően vagy nem állapotirányítható vagy nem megfigyelhető. **Ha a $W_p(s)$ átviteli függvényében pólus–zérus megegyezés nincs, akkor a folyamat állapotirányítható és megfigyelhető.**

Az állapotirányítás tervezése

Az állapotirányíthatóság fizikai fogalmát és az állapotvisszacsatolás *lényegét* egy elsőrendű (n=1) folyamat állapotvisszacsatolásával szemléltetjük, ennek ugyanis a szerkezeti illusztrációja (lásd 1. ábra) is igen egyszerű és könnyen áttekinthető. Az elsőrendű folyamat egyike az egytárolós, arányos önbeálló tag (átviteli függvénye $W_p(s)=y(s)/u(s)=k_p/(1+sT)$, átmeneti függvénye $v_p(t)=L^{-1}\{W_p(s)/s\}=k_p[1-exp(-t/T)]$, $k_p>0$, $T>0$), amelynek matematikai modellje integráló alaptag *negatív* visszacsatolásával jellemezhető. Az átviteli függvény alapján felírható differenciálegyenlet:

$$(sT+1)y(s) = k_p u(s) \quad \Rightarrow \quad T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_p u(t).$$

Ennek megoldása igen egyszerű, mátrixműveletek nélkül tárgyalható.

Megjegyzés

Az aszimptotikusan stabilis, elsőrendű, egytárolós, arányos *folyamat* szerkezeti illusztrációja lehet például egy *RC*-áramkör[3] (egytárolós, arányos tag (1. ábra).

Adott $R>0$, $C>0$ paraméterek mellett a *fizikai* működés alapján belátható, hogy van a folyamatot szimbolizáló *RC*-áramkörnek olyan $u(t)$ bemenő feszültsége, amely az $y(t)$ kimenőfeszültséget (ami most az áramkör $x(t)=y(t)$ állapotváltozója is) pl. az $x(0)=0$ V értékéről adott (pl. $t_v=2$ s) idő alatt egy előírt $x(t_v)=x(2)=10$ V állapotába átviszi. A feladat sokféle $u(t)$ időfüggvényű feszültséggel megoldható, ezek egyikének a meghatározása pl.:

$$x(t_v)\big|_{t_v=2} = u_{\max}(1-e^{-\frac{1}{RC}t})\Big|_{t_v=2} = 10 \quad \Rightarrow \quad u_{\max} = \frac{10}{(1-e^{-\frac{2}{RC}})}$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \begin{cases} u_{\max}\,1(t) & 0<t<t_v \\ \text{tetsz.} & t>t_v \,. \end{cases}$$

Ezt az $u(t)=u_{max}\mathbf{1}(t)$ feszültséget a $0<t<t_v=2$ s időintervallumban működtetve az *RC*-tag bemenetén, az állapotváltozó időfüggvénye és ennek $t_v=2$ s időpontban felvett értéke (lásd 2. ábra):

$$x(t)\big|_{t_v=2} = u_{\max}(1-e^{-\frac{1}{RC}t})\Big|_{t_v=2} =$$

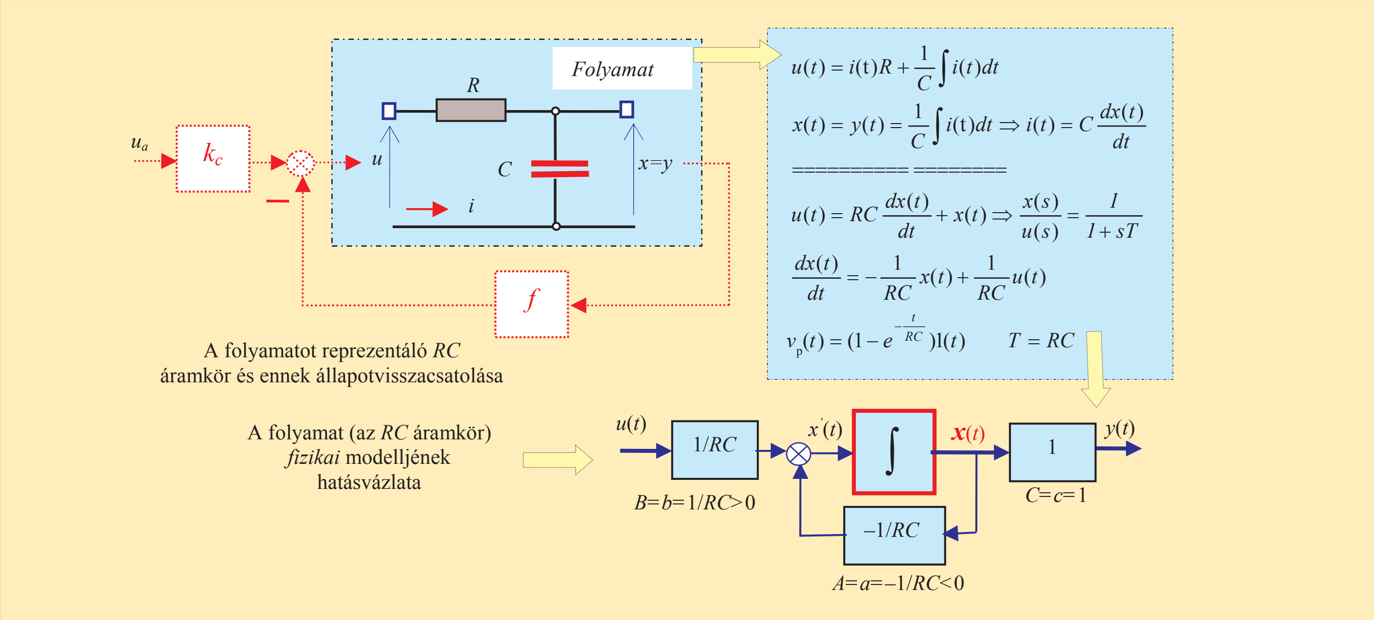
$$= \frac{10}{(1-e^{-\frac{2}{RC}})}(1-e^{-\frac{1}{RC}t})\Big|_{t_v=2} = 10\ \text{V}.$$

Ebből az is következik, hogy az adott *RC* áramköri elemekből álló folyamat állapotirányítható[4]. Formálisan: n=1, $A=a=-1/(RC)$, $B=b=1/(RC)$ → $C_o=[b]=1/(RC)$ és $rang(C_o)=n=1$.

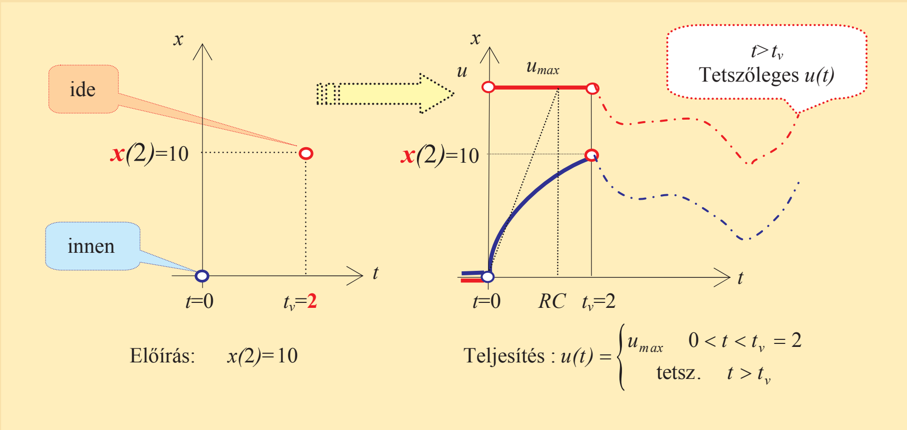
2 Irodalom: *Benjamin C. Kuo*: Önműködő szabályozó rendszerek.

3 A folyamatot reprezentáló *RC*-áramkör állapotvisszacsatolásának szerkezeti – áramköri megoldását a 1. ábra csupán elvi (hatásvázlatszintű) lehetőségként szemlélteti.

4 Ha a rendszám $n\geq2$, az állapotirányíthatóság eldöntése már nem ilyen triviális. Ekkor ugyanis az $x(t)$ állapotvektor *n számú* komponenseinek *mindegyikét* kell az *egyetlen u(t)* bemenőjel segítségével az előírt $t_v-t_0>0$ idő alatt az $x_i(t_0)$ állapotból a szintén előírt $x_i(t_v)$ állapotba átvinni.



1. ábra Elsőrendű folyamat áramköri illusztrációja és matematikai modellje



2. ábra Elsőrendű folyamat állapotváltozójának időfüggvénye

Az általános elsőrendű[5] folyamat állapotegyenlete legyen

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bu(t)$$
$$y(t) = cx(t).$$

A paramétermátrixok $\boldsymbol{A}=a$, $\boldsymbol{B}=b$, $\boldsymbol{C}=c=1$, ($D=d=0$) most *skaláris* mennyiségek, $\boldsymbol{A}$ sajátértéke önmaga ($\lambda=a$) és $c=1$ következtében $y(t)=x(t)$. A folyamat alaptagokkal felépített hatásvázlatának egyetlen integráló tagja a $\lambda=a$ sajátértékkel van visszacsatolva (lásd 3. ábra). Az elsőrendű folyamat aszimptotikusan *stabilis*, ha az integráló tag visszacsatolása *negatív*, vagyis $\lambda=a<0$. Ha $a\geq 0$, *labilis* elsőrendű folyamatról van szó (lásd a 3. ábra) $v_R(t)$ átmeneti függvényét $f=0$ esetén). Az elsőrendű folyamat $b\neq 0$ értékeknél bizonyosan állapotirányítható, miután létezik olyan korlátos $u(t)$ bemenőjel, amely az $x(t)$ állapotváltozót egy *előírt* $t_v-t_0>0$ idő alatt az adott $x(t_0)$ állapotból a *szintén előírt* $x(t_v)$ állapotába az a és $b\neq 0$ paraméterek bármekkora értékeinél (lásd az előző példát, ill. a 2. ábrát) átviszi. Általános elsőrendű folyamat esetében a folyamat *állapotvisszacsatolását* és ennek lehetséges következményeit a 3. ábrán foglaltuk össze. A $\lambda=a>0$ választás miatt szándékoltan labilis folyamat állapotvisszacsatolását tárgyaljuk, bemutatva ezzel azt a tulajdonságot is, hogy a labilis folyamat az állapotvisszacsatolás f átviteli tényezőjének megfelelő megválasztásával miként stabilizálható. A 3. ábra hatásvázlatából az a következtetés is levonható, hogy $b=0$ esetében a folyamat nem irányítható (ekkor $u(t)$ jellel az $x(t)$ állapotváltozóra befolyás nem gyakorolható), ill. $c=0$ esetében nem megfigyelhető (mert az $y(t)$ kimenőjelben az $x(t)$ állapotváltozó nem jelenik meg).

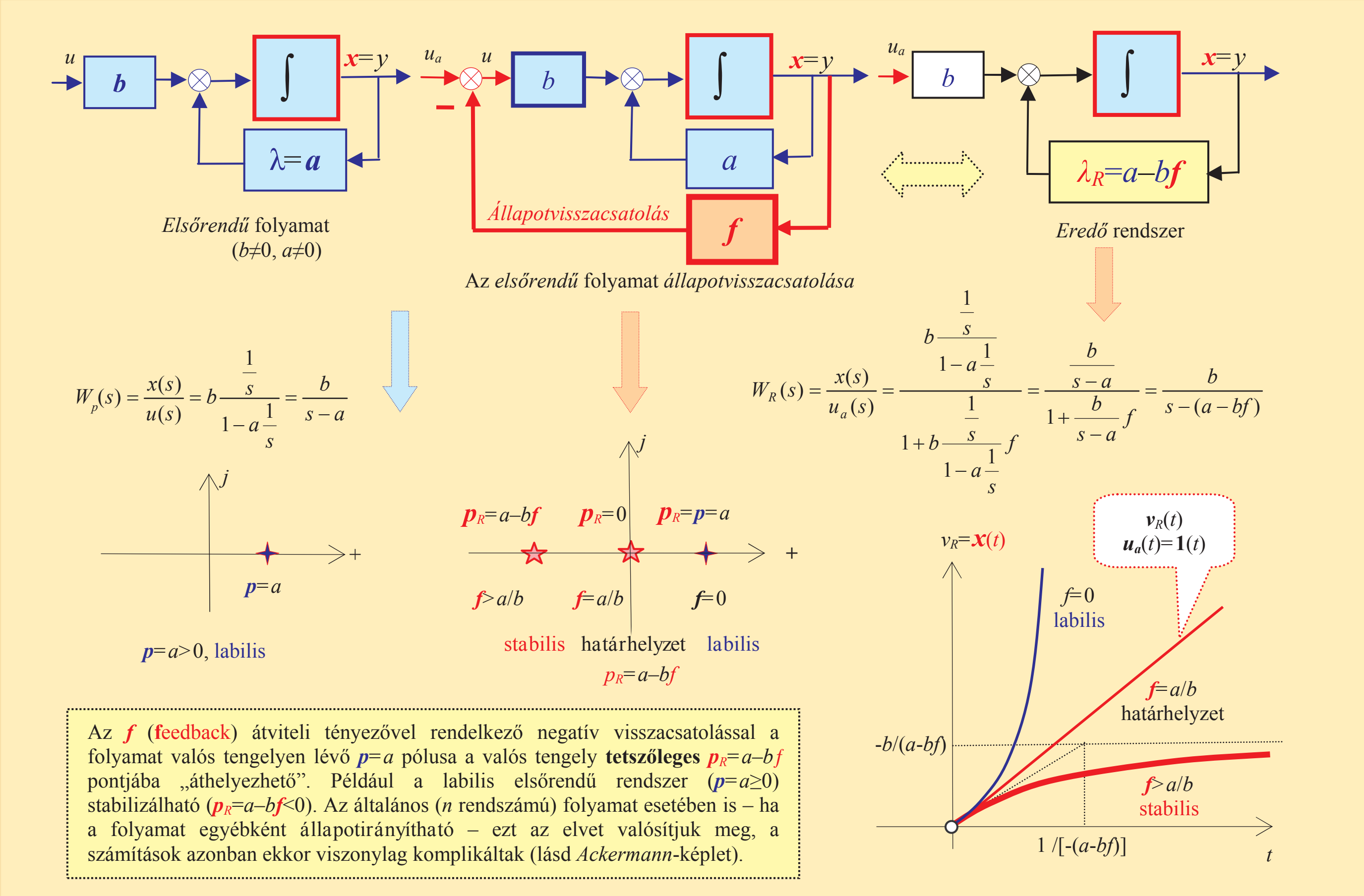
Figyeljük meg, hogy a folyamat eredeti átviteli tényezője $k_p=-b/a$, a visszacsatolt rendszeré pedig $k_R=-b/(a-bf)$. Mindezek miatt a visszacsatolt struktúra bemenetén egy ún. k_c korrekciós átviteli tényezővel rendelkező, időkésleltetés nélküli arányos tag beiktatása indokolt, amivel a rendszer eredő átviteli tényezője tetszőlegesen alakítható. Az $n>1$ rendszámú folyamat állapotvisszacsatolása esetében – legalább is a lényeget tekintve – hasonló feladatról van szó, azzal az eltéréssel, hogy a p_i helyekről a p_{Ri} helyekre „áthelyezendő” pólusok száma $n>1$.

Tetszőleges *n*-rendszámú SISO-folyamat állapotviszacsatolása

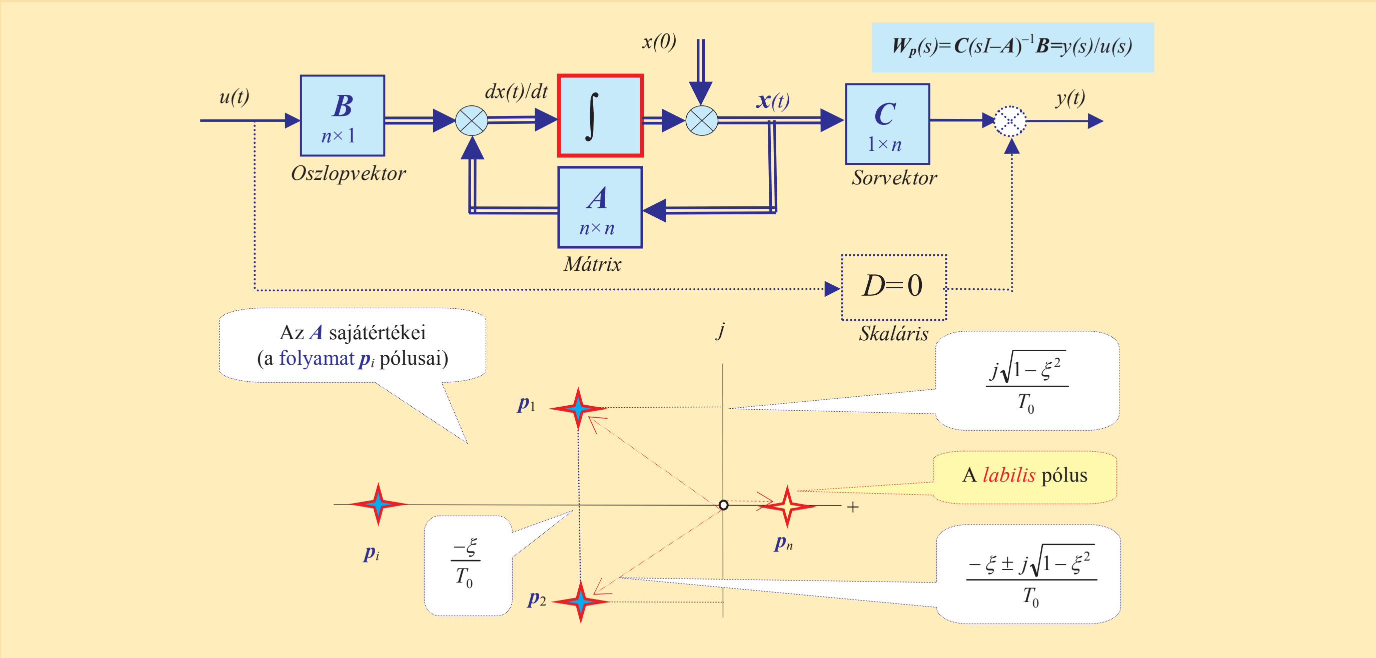
Az $n\geq 1$ rendű **SISO-**folyamat állapotegyenlete:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

5 Az elsőrendű ($n=1$) rendszer analízisének az ad jelentőséget, hogy az első kanonikus alakra hozó transzformációval (a $W_p(s)$ átviteli függvény $r_i/(s-p_i)$ komponensekből álló részlettörtekre történő átalakításával) az $n>1$ rendszámú rendszer elsőrendű rendszerek egymással *párhuzamos kapcsolást* alkotó struktúrájára bontható fel. Az $F_i(s)=r_i/(s-p_i)$ komponenshez tartozó időfüggvény pedig $L^{-1}\{F_i(s)\}=r_i exp(p_i t)$.



3. ábra Elsőrendű folyamat állapotvisszacsatolása



4. ábra A folyamat hatásvázlata és az A állapotmátrixának sajátértékei (a folyamat p_i pólusai)

Ebben *A, B, C, D*=0 a folyamat paramétermátrixai[6]. A folyamat hatásvázlatát és *A* állapotmátrixának sajátérték-eloszlását a 4. ábra mutatja. Láthatóan a folyamatnak pólusa *lehet* az *s* komplex sík labilis (pozitív valósrészű) félsíkján *is*, ami a folyamat labilitásának megnyilvánulása.

(Folytatjuk!)

szbela12@gmail.com,
fjuhaszne@gmail.com

6 A SISO-folyamatok $v_p(t)$ átmeneti függvényére általában $v_p(0)$=0, ami az állapotegyenletben a *D*=0 értéknek felel meg. Ilyen esetben az *u(t)* bemenőjel kizárólag az *x(t)* állapotváltozókon keresztül gyakorol befolyást az *y(t)* kimenőjelre, és a $W_p(s)$ átviteli függvénynek legalább egy pólustöbblete van. Az átviteli függvény ekkor szigorúan szabályos, valódi törtfüggvény.