Szabályozástechnika 33.

Állapotirányítás, állapotirányítás megfigyelővel, optimális (LQR) irányítás – 3.

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencné

Az állapotirányítás témakörének feldolgozásához jelentős támogatást ad, ha az *x(t)* állapotváltozóiról visszacsatolni kívánt folyamat *A* állapotmátrixa bizonyos értelemben egyszerűbb, speciális alakban áll rendelkezésre. Mivel ez általában nincs így, az egyszerűbb alak létrehozására új, $x_T(t)=Tx(t)$ állapotváltozók bevezetésével a *T* transzformációs mátrixszal végrehajtott állapottranszformáció teremt lehetőséget. Ennek alkalmazásával és a *T* mátrix célszerű megválasztásával a transzformált rendszer $A_T=T^{-1}AT$ mátrixa az eredeti *A* mátrixhoz képest egyszerűbb, kanonikus alakokra hozható.

A dinamikus rendszer *A* állapotmátrixának különféle *kanonikus* alakjai:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\textit{diagonális}\text{ alak}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} -h_1 & -h_2 & -h_3 & \cdots & -h_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\textit{irányíthatósági}\text{ alak}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -h_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -h_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -h_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -h_1 \end{bmatrix}}_{\textit{megfigyelhetőségi}\text{ alak}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -h_n & -h_{n-1} & -h_{n-2} & \cdots & -h_1 \end{bmatrix}}_{\textit{fázisváltozós}\text{ alak}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\textit{alsóháromszög}\text{ alak}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \beta_{12} & \beta_{13} & \cdots & \beta_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \beta_{23} & \cdots & \beta_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & \beta_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\textit{felsőelsőszög}\text{ alak}}$$

Megjegyzés

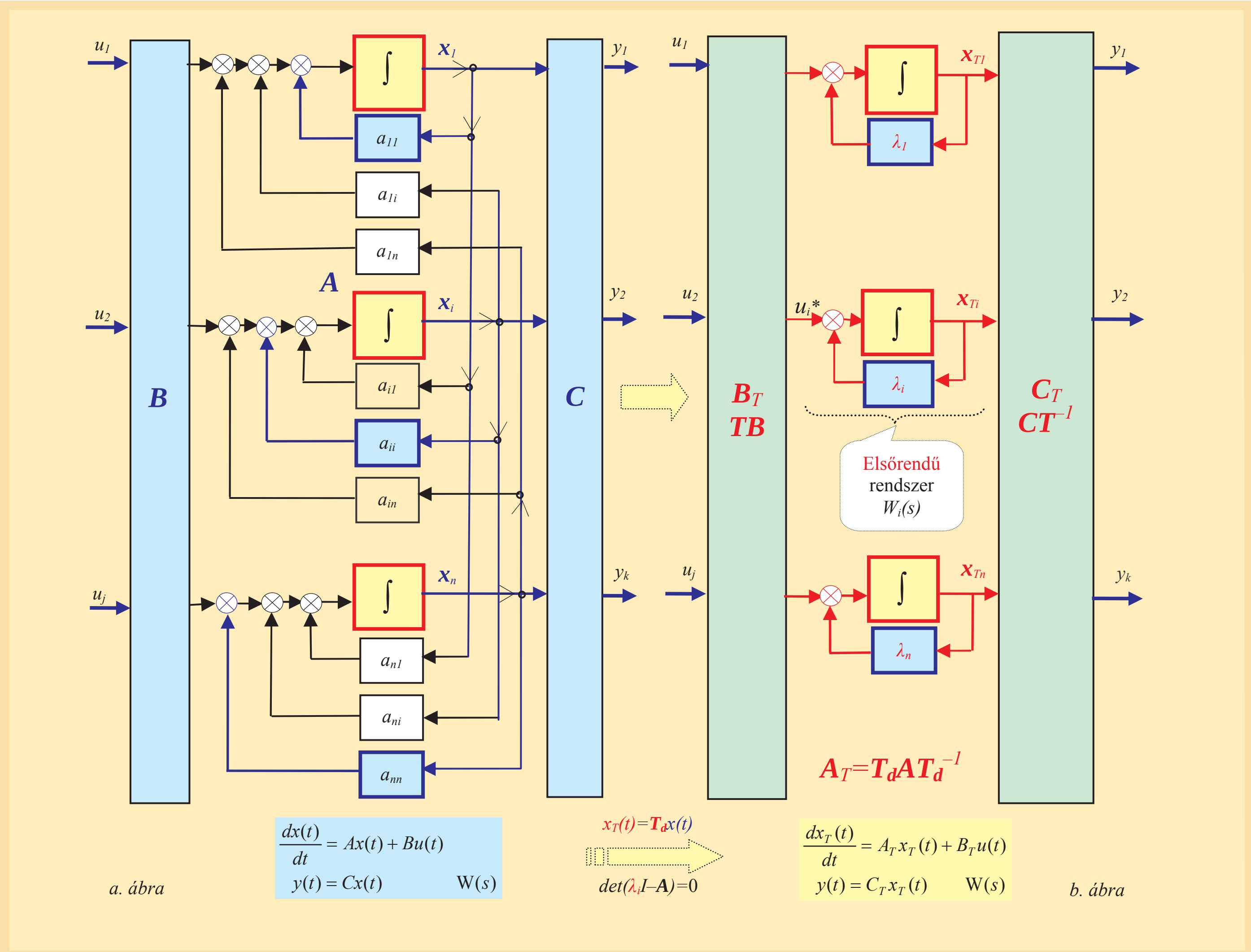
Ezek legfontosabbika a *diagonális* (más néven *átlós*) és az *irányíthatósági* kanonikus alak, valamint az ezeket előállító $T=\boldsymbol{T}_d$ és $T=\boldsymbol{T}_{cb}$ transzformációs mátrixok. Ha a folyamat eredeti *A* állapotmátrixa a *fázisváltozós* alakjában áll rendelkezésünkre, akkor ennek *diagonális* alakra történő átalakítását létrehozó $T=\boldsymbol{T}_v$ transzformációs mátrix a *V Vandermonde*-mátrix inverze ($\boldsymbol{T}_v=V^{-1}$)[1]. Az adott alakokra hozó *T* transzformációs mátrix meghatározása körülményes eljárás, általában az *A* mátrix sajátvektorainak felhasználására épül. Az ***A*** állapotmátrixnak a diagonális, irányíthatósági és megfigyelhetőségi kanonikus alakjaira hozó $\boldsymbol{A}_T=\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1}$ állapottranszformációját – mellőzve a viszonylag bonyolult mátrixműveleteket – MATLAB-támogatással is elvégezhetjük. Az egyszeres multiplicitású, sajátértékekkel rendelkező ***A*** állapotmátrix diagonális alakot előállító transzformációjának számítása MATLAB-támogatással az ***A*** állapotmátrix ***m*** sajátvektorainak meghatározása alapján történhet: `[m,AT]=eig(A); Td=inv(m); AT=inv(m)*A*m;`. Ekkor $T_d=m^{-1}$. Vagy közvetlen utasítással: `[AT,BT,CT,DT,Td]=canon(A,B,C,D,'modal');`. A megfigyelhetőségi alak előállítása: `[AT,BT,CT,DT,Tcb]=... canon(A,B,C,D,'companion');`

A diagonális alak jelentősége abban van, hogy az állapotváltozókat egymástól **szétcsatolja.** Ha a transzformálatlan rendszer ***A*** állapotmátrixának minden eleme valós és nem zérus érték, akkor a gerjesztetlen (*u(t)*=0) rendszer *i* sorszámú $dx_i(t)/dt$ állapotsebessége *minden* egyes állapotváltozónak a függvénye:

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=a_{i1}x_1(t)+\cdots+a_{ii}x_i(t)+\cdots+a_{in}x_n(t) \quad i:1,2,...,n$$

Ez azt jelenti, hogy a rendszer $x_i(t)$ állapotváltozóját előállító integráló alaptagjának $dx_i(t)/dt$ bemenete minden egyes állapotvál-

1 A T_d, T_{cb} és T_v transzformációs mátrixra vonatkozó képleteket *Bokor József – Gáspár Péter*: Irányítástechnika járműdinamikai alkalmazásokkal című műve tartalmazza.



1. ábra Az állapotváltozók szétcsatolása állapottranszformációval

tozóról (így önmagáról is, ha $a_{ii}\neq 0$) *vissza van csatolva* (lásd 1. ábra a-jelű részletét). A $T=\boldsymbol{T}_d$ transzformációval *diagonális* alakra hozott $\boldsymbol{A}_T$ állapotmátrixú transzformált rendszerben viszont az i sorszámú $dx_{Ti}(t)/dt$ állapotsebesség – a

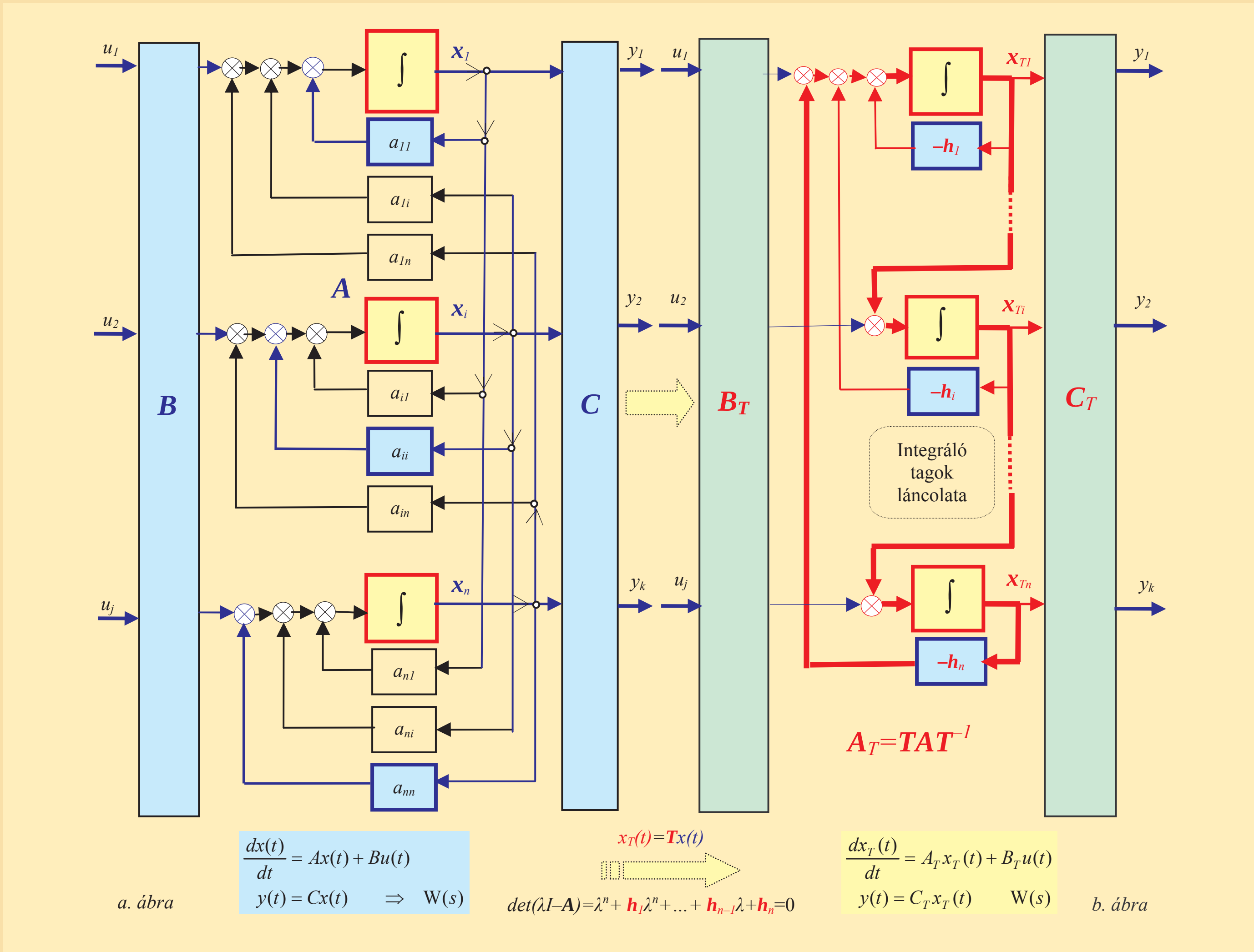
$$\frac{dx_{Ti}(t)}{dt}=\lambda_i x_{Ti}(t) \quad i=1,\,2,\,...,\,n$$

egyenletnek megfelelően – *kizárólag* az $x_{Ti}(t)$ állapotváltozótól függ, vagyis a transzformált rendszer $x_{Ti}(t)$ állapotváltozóját előállító, $dx_{Ti}(t)/dt$ bemenetű integráló alaptagja az $x_{Ti}(t)$ állapotváltozóról (vagyis kizárólag önmagáról, ha $\lambda_i\neq 0$) van visszacsatolva (lásd még az átviteli függvény *párhuzamos* felbontását és az 1. ábra b-jelű részletét). Erre az alakra azonban az eredeti állapotegyenlet csak akkor hozható, ha az $\boldsymbol{A}$ állapotmátrix minden λ_i sajátértéke *egymástól különböző*[2]. Az állapotváltozók szétcsatolását a 1. ábra hatásvázlata szemlélteti.

2 Ha az $\boldsymbol{A}$ állapotmátrixnak többszörös (több, egymással azonos) λ_i sajátértékei is vannak, az állapottranszformációval az itt nem részletezett ún. *Jordán*-alak állítható elő. A fizikai rendszert leíró, linearizált állapotegyenlet A átviteli mátrixának általában egyszeres multiplicitású sajátértékei vannak, így a *Jordán*-alaknak elméleti jelentés adható. Az A állapotmátrix $\lambda_i=\sigma_i+j\omega_i$, $\lambda_{i+1}=\sigma_i-j\omega_i$ sajátértékeinek egy része konjugált komplex párban is előfordulhat, ekkor az ezeknek megfelelő két elsőrendű rendszert egy másodrendű rendszerbe célszerű összevonni. Ekkor a diagonális alak kissé módosul, de az A_T állapotmátrixában – az egyes sajátértékek komplex voltuk ellenére – továbbra is valós számok szerepelnek.

Megjegyzés

Az eredeti rendszer $\boldsymbol{A}$ állapotmátrixának a T_d transzformációval diagonális alakra történő átalakításával láthatóan az n darab elsőrendű differenciálegyenletből álló csatolt (eredeti, 1. ábra a-jelű oldala) rendszer n darab elsőrendű differenciálegyenletből álló csatolatlan (transzformált, 1. ábra b-jelű oldala) rendszerre particionálható. A *csatolatlan* (transzformált) rendszer integrátorainak visszacsatolásaiban a *csatolt* (transzformálatlan) rendszer $\boldsymbol{A}$ állapotmátrixának λ_i sajátértékei szerepelnek. Könnyen belátható, hogy ezek negatív értékei mellett ($\lambda_i<0$) az integráló tagok negatív visszacsatolásban működnek. Ekkor lehetséges csak, hogy $u_i*(t)=u_{i0}*$ állandó bemenőjelre az $x_{Ti}(t)$ állapotváltozók mindegyike $t\rightarrow\infty$ mellett $x_{Ti0}=u_{i0}*/(-\lambda_i)$=állandó értéket vegyen fel (az i sorszámú integrátor x_{Ti} kimenőjele csak akkor lehet állandó, ha az $dx_{Ti0}(t)/dt=u_{i0}*+\lambda_i x_{Ti0}$ bemenőjele zérus, vagyis $u_{i0}*+\lambda_i x_{Ti0}=0$). Ekkor a rendszer *aszimptotikusan stabilis*. Ha viszont valamelyik sajátérték $\lambda_i\geq 0$, a rendszer bizonyosan labilis, mert állandó bemenőjelre valamelyik $x_{Ti}(t)$ állapotváltozója $t\rightarrow\infty$ mellett (időben lineárisan ($\lambda_i=0$), vagy exponenciálisan ($\lambda_i>0$) növekedve) a végtelenhez tart. (Hasonló következtetések a csatolatlan rendszer struktúrájából lényegesen körülményesebben lennének megtehetők). A szétcsatolt állapotvektor $x_{Ti}(t)$ komponensei (*negatív* visszacsatolással, amikor is $\lambda_i<0$) *egytárolós arányos tagok* kimenőjeleinek tekinthetők. A struktúra belső részeinek átviteli függvényei ekkor (lásd még az átviteli függvény párhuzamos felbontását):



2. ábra Állapottranszformáció az irányíthatósági kanonikus alak létrehozására

$$W_i(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1-\frac{\lambda_i}{s}} = \frac{1}{s-\lambda_i} = \frac{1}{-\lambda_i}\frac{1}{1+s\frac{1}{-\lambda_i}} = \frac{k_{pi}}{1+sT_i}$$

$$k_{pi} = T_i = \frac{1}{-\lambda_i} > 0, \quad ha \quad \lambda_i < 0.$$

A szétcsatolással előállított struktúra alapján láthatjuk, hogy az *elsőrendű rendszer* tulajdonságainak ismerete teremti meg annak a lehetőségét, hogy tetszőleges rendszámú rendszer analízisét egyszerű matematikai módszerekkel tárgyaljuk. Ennek alapja az n rendű rendszer egymással párhuzamos kapcsolást alkotó, *elsőrendű* rendszerekre történő particionálása.

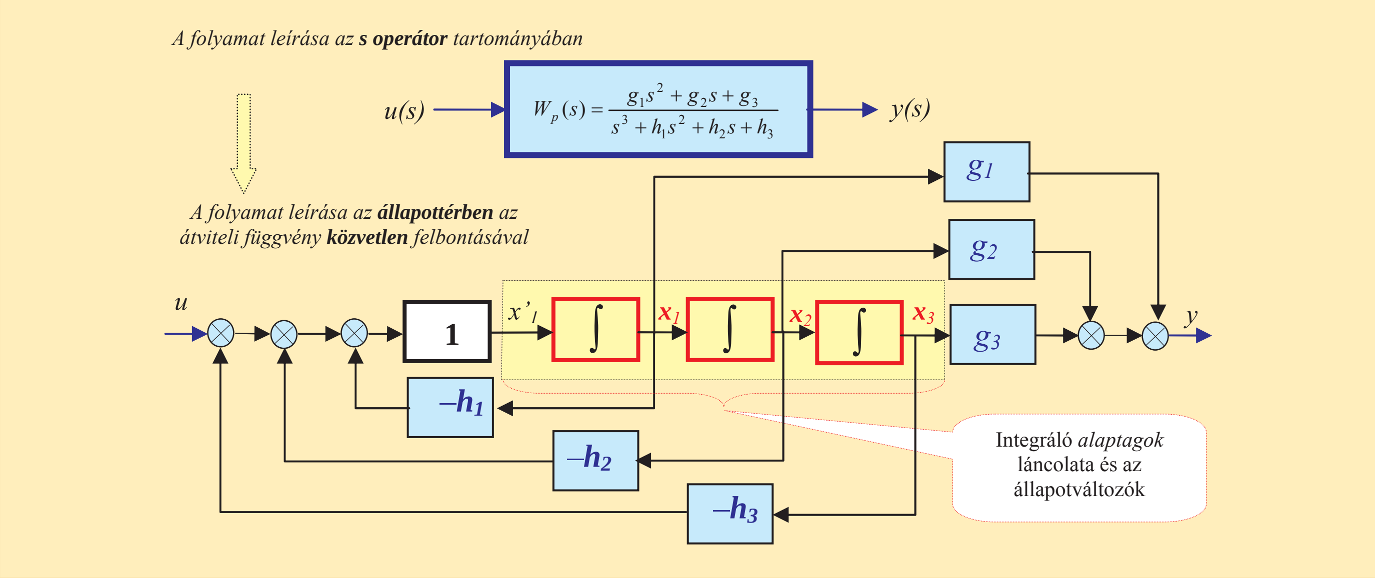
Az irányíthatósági kanonikus alakra hozó transzformáció struktúráját a 2. ábrán szemléltetjük.

Ennek jellegzetes ismérve az *integráló alaptagok láncolatának* (soros kapcsolásának) struktúrája, ill. az a tulajdonság, hogy a transzformált rendszer minden egyes integráló alaptagjának $x_{Ti}(t)$ kimenőjele az *első* integrátor bemenetére van visszacsatolva. A visszacsatolások $-\boldsymbol{h}_i$ átviteli tényezői ekkor a transzformálatlan (az eredeti) rendszer $det(\lambda I-A)$ karakterisztikus polinomjának negatív együtthatói.

Megjegyzés
A SISO dinamikus tag $W(s)=G(s)/H(s)$ algebraitört alakú átviteli függvényének ismeretében a MATLAB `[A,B,C,D]=tf2ss(Gs,Hs);` függvénye a tag állapotegyenletének irányíthatósági kanonikus alakját adja, amelyet a `[AT,BT,CT,DT,T]=canon(A,B,C,D,'modal');` függvénnyel – ha ez szükséges – *diagonális* alakra is hozhatunk. Bár az irányíthatósági kanonikus alak a rendszer tranziens viszonyinak minőségi tulajdonságairól nem ad olyan egyszerű képet, mint amit az állapotváltozók szétcsatolását tartalmazó első kanonikus alak ad, az állapotirányítás tervezésében azonban ez az alak is – egyszerűsítve az állapotirányítás *tervezési eljárását* – jelentős szerepet játszik.

Vegyük észre, hogy az állapotváltozók transzformációjával keletkezett transzformált rendszerben – bármilyen transzformációról is legyen szó – a D paramétermátrix változatlan marad ($\boldsymbol{D}_T=D$). Ennek oka az, hogy a $D\neq 0$ paraméter mutatja meg, hogy a folyamat $u(t)$ bemenőjele – az állapotváltozókon keresztül létrehozott hatást mintegy megkerülve – milyen $Du(t)$ *direkt* hatást fejt ki az $y(t)$ kimenőjelre, ami egyébként az állapotvektor által kifejtett $Cx(t)$, ill. $CT^{-1}x_T(t)$ hatásától független. A transzformáció természetesen a dinamikus tag eredeti $W(s)=G(s)/H(s)$ átviteli függvényét sem változtatja meg[3], vagyis

3 Mint láthattuk, a ***T*** transzformációs mátrix megválasztásával ugyanazon dinamikus rend-



3. ábra Harmadrendű folyamat – irányíthatósági kanonikus alakjának megfelelő – hatásvázlata

$W(s)=C(sI–A)^{–1}B+D= CT^{–1}(sI–TAT^{–1})^{–1}BT+D=$
$=C_T(sI–A_T)^{–1}B_T+D=y(s)/u(s)$,

T bármilyen *megengedett* kifejezéséről is legyen szó.

A SISO-folyamat leírása, irányíthatósága és megfigyelhetősége

A $W_p(s)$ átviteli függvénnyel (vagy az ennek megfelelő állapotegyenlettel) rendelkező, n rendű SISO-folyamat legyen *állapotirányítható* (*rang* $C_o=n$) és *megfigyelhető* (*rang* $O_b=n$). Ha a *folyamat* rendszáma pl. $n=3$, és átmeneti függvénye ugrást nem tartalmaz ($v_p(0)=0$), akkor a $W_p(s)=G_p(s)/H_p(s)$ átviteli függvény $G_p(s)$ számlálójának m fokszáma a $H_p(s)$ nevezőjének n fokszámánál kisebb ($m<n=3$)[4], és a $G_p(s)$, $H_p(s)$ polinomoknak nincsenek egyforma gyökei. Ennek figyelembevételével legyen a $H_p(s)$ nevező $h_0=1$ együtthatójára normalizált, harmadrendű rendszert leíró átviteli függvény:

$$W_p(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{g_1 s^2 + g_2 s + g_3}{s^3 + h_1 s^2 + h_2 s + h_3} = \frac{G_p(s)}{H_p(s)}.$$

A folyamatot absztraháló jelátvivő tag **P, I, Σ** lineáris alaptagokból felépített egyfajta (pl. az átviteli függvény *közvetlen* felbontásából származtatott és az irányíthatósági kanonikus alakot szolgáltató) lehetséges hatásvázlata a 3. ábrán látható. Az *irányíthatósági kanonikus alaknak* megfelelő[5], lineáris alaptagokat tartalmazó hatásvázlattal történő leírásának az ad jelentőséget, hogy ennek alapján egyrészt a folyamat *állapotegyenlete* és az A, B, C, D paramétermátrixai az átviteli függvény g_1, g_2, g_3, valamint a h_1, h_2, h_3 együtthatóinak ismeretében egyszerűen felírhatók (3. ábra), másrészt az állapotvisszacsatolás $\boldsymbol{F}$ átviteli tényezője (a rendszer előírt p_{Ri} pólusainak felvételével) egyszerűen meghatározható. Ez utóbbi eljárás a folyamat és az állapotvisszacsatolt rendszer $det(sI–A)$ és $det[sI–(A–BF)]$ karakterisztikus polinomjainak együttható-összehasonlításán alapszik, és nem igényli a komplikált mátrixműveleteket tartalmazó *Ackermann*-képlet alkalmazását. A hatásvázlat alapján figyeljünk fel arra, hogy most a $W_p(s)$ átviteli függvényű folyamat

$$H_p(s)=det(sI–A)=s^3+h_1s^2+h_2s+h_3$$

karakterisztikus polinomjának $–h_1$, $–h_2$, $–h_3$ negatív együtthatói alkotják az integrátorok visszacsatolásait.

Megjegyzés

Ha az $u(t)=u_0$ bemenőjel állandó és a kimenőjelnek is van $y(t)=y_0$ állandó értéke, akkor $y_0=(g_3/h_3)u_0=k_pu_0$. Ez az állandósult állapot akkor tud létrejönni, ha a tag aszimptotikusan stabilis. Az állandósult állapotban ugyanis az x_{30} állapotváltozónak is állandónak kell lennie, ami csak úgy lehetséges, ha az integrátorlánc integrátorainak mindegyik bemenőjele (az x_{20}, x_{10} állapotváltozók és a dx_{10}/dt állapotsebesség) zérus (ha ez nem állna fenn, az x_3 nem lehetne állandó).Vagyis az állandósult állapotban $dx_{10}/dt=u_0–h_3x_{30}=0$, $g_1x_{10}=g_2x_{20}=0$ és ezért $x_{30}=u_0/h_3$, $y_0=g_3x_{30}=(g_3/h_3)u_0$.

Ahhoz, hogy az $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ állapotváltozókat az $u(t)$ bemenetre az f_1, f_2, f_3 állandó értékű átviteli tényezőkön keresztül visszacsatolhassuk, szükséges, hogy ezeket érzékelő szervek segítségével *mérni* tudjuk. Ha ez megvalósítható és alkalmazására sor is kerül, egy olyan új, külső visszacsatolásokat is tartalmazó struktúra keletkezik, amelynek állapotmátrixában az f_1, f_2, f_3 átviteli tényezők is meghatározó szerephez jutnak. Ezeknek az átviteli tényezőknek a *megfelelő* megválasztásával a visszacsatolt rendszer állapotmátrixának sajátértékei szabadon előírhatóak. *Miután a sajátértékek a tranziens folyamatokat alapvetően befolyásolják, az állapotvisszacsatolás mértékének célszerű alkalmazásával a visszacsatolt rendszer dinamikáját az előírt kívánalmaknak megfelelően alakíthatjuk.*

(Folytatjuk!)

szbela12@gmail.com, fjuhaszne@gmail.com

szer állapotegyenleteiben sokféle alakot ölthetnek az állapotvektor és a paramétermátrixok. A transzformáció megválasztásától függően lehet a rendszer állapotvektora irányítható, ill. megfigyelhető.

4 Ekkor a folyamat $W_p(s)$ átviteli függvényének legalább egy pólustöbblete van.

5 Ez a felbontás az *integráló tagok láncolatát* tartalmazó hatásvázlatot eredményezi, ami az *irányíthatósági* kanonikus alak jellegzetes ismérve. Az adott esetben a számláló fokszáma alacsonyabb a nevező fokszámánál ($g_0=0$!), ezért $v_p(0)=0$. A hatásvázlatból is nyomon követhető, hogy ugrás alakú $u(t)$ bemenőjelre az $y(t)$ kimenőjel nem ugorhat ($g_0=0$). **MATLAB-**támogatás: `[A,B,C,D]=tf2ss(Gp,Hp)`.