Szabályozástechnika 32.

Állapotirányítás, állapotirányítás megfigyelővel, optimális (LQR) irányítás – 2.

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencné

Az állapotvisszacsatolás megvalósításának – bármilyen célkitűzés is a visszacsatolás célja – akkor van realitása, ha az *A, B, C, D* paramétermátrixaival jellemzett LTI-rendszer *x(t)* állapotváltozói az *u(t)* bemenőjellel irányíthatók, illetve az *u(t)* és az *y(t)* kimenőjelek mérési eredményeinek feldolgozásával az *x(t)* állapotváltozók meghatározhatók. Az állapotirányíthatóságot az *A, B* paramétermátrixokból felépített C_0 irányíthatósági mátrix–, az állapotmegfigyelhetőséget az *A, C* paramétermátrixokból felépített O_b megfigyelhetőségi mátrix rangfeltételei határozzák meg. Az irányíthatóság és megfigyelhetőség fogalmainak és feltételrendszerének kidolgozása *Kálmán* nevéhez fűződik.

A $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ súlyozó, szimmetrikus mátrixokat a rendszertervező tapasztalati adatokra támaszkodva adja meg (Q szimmetrikus és pozitív definit vagy pozitív szemidefinit[1], R szimmetrikus és definit mátrixok, **SISO**-folyamat esetében $R=r$ skaláris, és $u^T(t)Ru(t)=ru^2(t)$). Ezek előzetes felvételével és a $J(x,u)$ minimalizálásának *követelménye alapján* kell megtalálnunk azt az $u_{opt}(t)$ irányítójelet, amely minimalizálja a költségfüggvényt olyan korlátozás mellett, amelyet az állapotegyenlet egyidejű kielégítése is igényel. A viszonylag bonyolult (funkcionál szélsőértékét kereső) matematikai eljárás keretei között – az *optimalitás elvét*[2], a *Hamilton – Jacobi*-egyenleteket, a feltételes optimum *Lagrange*-módszerét kell felhasználnunk, ami végső soron az állapotvisszacsatolás struktúrájához vezet, amely szerint a $J(x,u)$ költségfüggvényt minimalizáló optimális irányítójel:

$$u_{opt}(t)=-\boldsymbol{R}^{-1}B^T\boldsymbol{S}x(t)=-\boldsymbol{F}_{LQ}x(t)\ .$$

Az $\boldsymbol{F}_{LQ}$ átviteli tényezőt (sorvektort) meghatározó kifejezésben $\boldsymbol{R}$ a tervező által előírt adat, $\boldsymbol{B}$ a folyamat bemeneti mátrixa, $\boldsymbol{S}$ pedig az ún. $\boldsymbol{S}A+A^T\boldsymbol{S}-\boldsymbol{S}B\boldsymbol{R}^{-1}B^T\boldsymbol{S}+\boldsymbol{Q}=0$ algebrai *Riccati*-féle mátrixegyenlet $\boldsymbol{S}$-re történő megoldása[3].

> **Megjegyzés**
> Az optimalitás elve kimondja: tekintet nélkül arra, hogyan jutottunk a dinamikus rendszer $x(t_0)$ állapotából az $x(t_1)$ állapotába ($t_1>t_0$), ha már $x(t_1)$ ismert, akkor $x(t_1)$ értékét az állapotegyenletekhez rendelt J költségfüggvény minimumát biztosító megoldásához – mint kezdeti állapotot felhasználva – a $t_1 \le t \le t_v$ időintervallumban az irányítást úgy kell megvalósítani, hogy ebben az időintervallumban J_1 minimális legyen. Más megfogalmazásban: egy optimális trajektória *utolsó szakasza* maga is optimális trajektória. A szélsőérték-keresés vizsgálatának elméleti eredménye szolgáltatja azt a tulajdonságot, hogy az $u_{opt}(t)=-F_{LQ}x(t)$ választása mellett van a költségfüggvénynek minimuma, ahol $F_{LQ}=R^{-1}B^T\boldsymbol{S}$.

Az algebrai *Riccati*-mátrixegyenlet $\boldsymbol{S}$ tényezőre történő megoldását követően határozhatjuk meg az állapotvisszacsatolás F_{LQ} átviteli tényezőjét. A Q, R súlyozómátrixok tapasztalati adatok alapján történő szubjektív felvétele, a bonyolult matematikai apparátus használata miatt az **LQR**-állapotvisszacsatolás alkalmazása – szemben az *Ackermann*-képlettel számítható előírt p_{Ri} pólusokra történő tervezés módszerével – a mérnöki gyakorlatban lassabban terjed el. Figyeljük meg, hogy a pólusáthelyezés és az LQR-irányítás hatásvázlat-struktúrája egymással azonos, eltérés a visszacsatoló mátrix számszerű értékeinek különbözőségében van.

Az állapotirányítás alkalmazásnak feltétele az $x(t)$ állapotváltozókhoz történő méréstechnikai hozzáférés lehetősége, valamint a folyamat ún. *állapotirányíthatósági* feltételének teljesülése. Ha az állapotváltozókhoz történő méréstechnikai hozzáférés technikailag nem lehetséges, akkor az állapotvisszacsatolást a folyamatot helyettesítő (és az állapotváltozók $x^*(t)$ becsült értékeihez hozzáférést lehetővé tevő) modellről – az *állapotmegfigyelőről* – lehet a visszacsatolást megvalósítani.

A következőkben elsődlegesen az előírt p_{Ri} póluseloszlási követelmény kielégítésére vonatkozó tervezés módszereivel (*rendszertechnikai méretezés előírt póluseloszlásra,* az $\boldsymbol{F}$ visszacsatoló vektor és a $\boldsymbol{k}_c$ erősítési tényező meghatározása), valamint az állapotmegfigyelő alkalmazásának és tervezésének témáival foglalkozunk, az **LQR**-szabályozást csupán érintőlegesen tárgyaljuk. Mielőtt ennek részleteire kitérnénk – a levezetések mellőzésével – áttekintjük a folyamat **állapotirányíthatóságára** és **megfigyelhetőségére** vonatkozó fogalmakat és tételeket, valamint az *állapottranszformáció* különféle eljárásait.

Az állapotirányíthatóság és megfigyelhetőség fogalmai

Az állapotegyenletével leírt *folyamat állapotvisszacsatolással* történő szabályozásának feltétele, hogy

- egyrészt a folyamat minden $x_i(t)$ állapotváltozója az $u(t)$ bemenőjellel befolyásolható legyen (*állapotirányíthatósági* feltétel),

---

1 Egy $\boldsymbol{Q}$ négyzetes mátrix *pozitív definit*, ha a $det(\lambda I-Q)$ karakterisztikus polinomjának minden λ_i gyöke pozitív. *Pozitív szemidefinit*, ha a λ_i gyökök közül egyik sem negatív, de legalább az egyik zérus. Az $x^T(t)Qx(t)$ kvadratikus alak a rendszer teljes energiáját „bünteti" a Q súlyozómátrix paramétereivel.

2 Az optimális irányítás részletezése: *Benjamin C. Kuo*: Önműködő szabályozó rendszerek.

3 Az **LQR**-szabályozás állapotvisszacsatolásának $\boldsymbol{F}_{LQ}$ átviteli tényezőjét – az igen egyszerű esetektől eltekintve – analitikus megoldóképlettel meghatározni általában nem lehet. Az állapotvisszacsatolás $\boldsymbol{F}_{LQ}=R^{-1}B^T\boldsymbol{S}$ átviteli tényezőjének kiszámításához ugyanis az algebrai *Riccati*-egyenletnek (**A**lgebraic ***R***iccati **E**quation, **ARE**) az $\boldsymbol{S}$ mátrixra történő numerikus megoldása is szükséges (*A, B* a folyamat ismert paramétermátrixai, illetve *R, Q* a tervező által felvett méretezési előírások).

- másrészt az $x_i(t)$ állapotváltozók méréstechnikailag is hozzáférhetők legyenek[4]. Ha ez utóbbi nem lehetséges, akkor a folyamattal mintegy „együttfutó" modellnek (a *megfigyelőnek*, más néven *állapotbecslőnek*) az $x_i*(t)$ állapotváltozóiról lehet az állapotvisszacsatolást megvalósítani, ehhez viszont az is szükséges, hogy a folyamat állapotváltozói megfigyelhetők legyenek (*megfigyelhetőségi* feltétel), és a becsült $x*(t)$ állapotváltozók (a hozzáférhetőségükön kívül) megfelelően közelítsék a folyamat eredeti $x(t)$ állapotváltozóit.

A folyamat állapotirányíthatóságának és megfigyelhetőségének fogalmai[5] és feltételei:

> Az *A, B, C, D* paramétermátrixaival leírt ***n***-rendszámú, lineáris, dinamikus folyamat **állapotirányítható,** ha létezik olyan korlátos és szakaszonként folytonos $u(t)$ bemenőjel, amelynek segítségével az állapotvektor egy $x(t_0)$ kezdeti állapotból $t_v-t_0>0$ véges idő alatt $(t_v>t_0)$ egy tetszőlegesen előírt $x(t_v)$ állapotba átvihető (lásd 1a. ábra). Ennek – itt nem részletezett – matematikai feltétele, hogy a folyamat ***A, B*** paramétermátrixaiból összeállított
>
> $$C_o=[B\ AB\ \ldots\ A^{n-1}B]$$
>
> irányíthatósági *(conrollability)* hipermátrix *rangja* ***n*** legyen.

> Az *A, B, C, D* paramétermátrixaival leírt ***n***-rendszámú, lineáris, dinamikus folyamat **megfigyelhető,** ha az $u(t)$ bemenőjel és az $y(t)$ kimenőjel $t_0<t<t_v$ időintervallumban történő mérési eredményeinek feldolgozásából az állapotvektor $x(t_0)$ értéke meghatározható (lásd 1b. ábra). Ennek – itt nem részletezett – matematikai feltétele, hogy a folyamat ***A, C*** paramétermátrixaiból összeállított
>
> $$O_b=[C^T\ A^TC^T\ \ldots\ (A^T)^{n-1}C^T]$$
>
> megfigyelhetőségi *(observability)* hipermátrix *rangja* ***n*** legyen.

Megjegyzés

SISO-folyamat esetében egyetlen $u(t)$ bemenő- és egyetlen $y(t)$ kimenőjelről van szó, az $x_i(t)$ állapotváltozók száma viszont $n\geq 1$ tetszőleges. Ez azt jelenti, hogy az *irányítható* és *megfigyelhető* **SISO**-folyamat esetében az *egyetlen u(t)* jellel lehet az *n* számú állapotváltozó *mindegyikét* az $x_i(t_0)$ állapotából az előírt $x_i(t_v)$ állapotba átvinni, ill. az $u(t)$ és $y(t)$ mérési eredmények $t_0<t<t_v$ időintervallumbeli feldolgozásával az *n* számú állapotváltozók *mindegyikének* az $x_i(t_0)$ értékét meghatározni.

Az állapotirányíthatóság és a megfigyelhetőség fogalmainak alapján könnyen belátható az a trivialitás, hogy ***B***=0 esetében – mivel ekkor az $x(t)$ állapotvektorra az $u(t)$ gerjesztés nem gyakorol befolyást – a folyamat *állapotirányíthatatlan*, ill. ***C***=0 esetében – amikor is az $y(t)$ kimenőjel nem tartalmazza az $x(t)$ állapotvektor komponenseit – a folyamat *megfigyelhetetlen* (lásd a folyamat állapotegyenletét vagy a hatásvázlatát).

Az állapotirányíthatóság mellett létezik a kimeneti irányíthatóság fogalma is. Ennek definíciója és feltétele:

> Az *A, B, C, D* paramétermátrixaival leírt ***n***-rendszámú, lineáris, dinamikus folyamat **kimenetileg** akkor **irányítható,** ha található olyan korlátos és szakaszonként folytonos $u(t)$ bemenőjel, amely az $y(t_0)$ kezdeti kimenőjelet $t_v-t_0>0$ véges idő alatt egy tetszőlegesen előírt $y(t_v)$ végállapotába átviszi. Ennek – itt nem részletezett – matematikai feltétele, hogy a folyamat paramétermátrixaiból összeállított
>
> $$C_y=[CB\ CAB\ \ldots\ CA^{n-1}B\ D]$$
>
> kimeneti irányíthatósági hipermátrix rangja *k* legyen (*k* a kimenőjelek száma, és **SISO**-folyamat esetben k=1).

Az irányíthatóság és megfigyelhetőség dualitása

A lineáris, időinvariáns (**LTI**) *n*-rendű rendszer irányíthatóságának és megfigyelhetőségének fogalmai egymásnak *duális* megfelelői. Ennek jelentése az, hogy a

$$dx(t)/dt = Ax(t) + Bu(t),$$
$$y(t) = Cx(t)$$

állapotegyenlettel leírt rendszer akkor és csakis akkor teljesen irányítható és teljesen megfigyelhető ($C_o=[B\ AB\ldots A^{n-1}B]$, $O_b=[C^T\ A^TC^T\ldots(A^T)^{n-1}C^T]$ és $rang(C_o)=rang(O_b)=n$), ha az állapotegyenletekhez rendelt

$$dx^*(t)/dt = -A^Tx^*(t)+ C^Tu(t),$$
$$y(t) = B^Tx^*(t)$$

$x*(t)$ állapotvektorral rendelkező *társrendszer* teljesen állapotirányítható és megfigyelhető[6]. A társrendszer irányíthatósági és megfigyelhetőségi hipermátrixai a saját paramétermátrixaik alapján: $C_o*=[C^T–A^TC^T\ldots–(A^T)^{n-1}C^T]$, $O_b*=[B–AB\ldots–A^{n-1}B]$. Mivel a negatív előjelek a rangot nem befolyásolják és láthatóan $rang[C_o*(C^T,A^T)]=rang[O_b(B,A)]$ és $rang[O_b*(B,A)]=rang[O_b(C^T,A^T)]$, a két rendszer az irányíthatóság és a megfigyelhetőség szempontjából egymással egyenértékű. Az eredeti és a társrendszer paramétermátrixainak megfeleltetései: $A\rightarrow \boldsymbol{A}^T$, $B\rightarrow \boldsymbol{C}^T$, $C\rightarrow \boldsymbol{B}^T$.

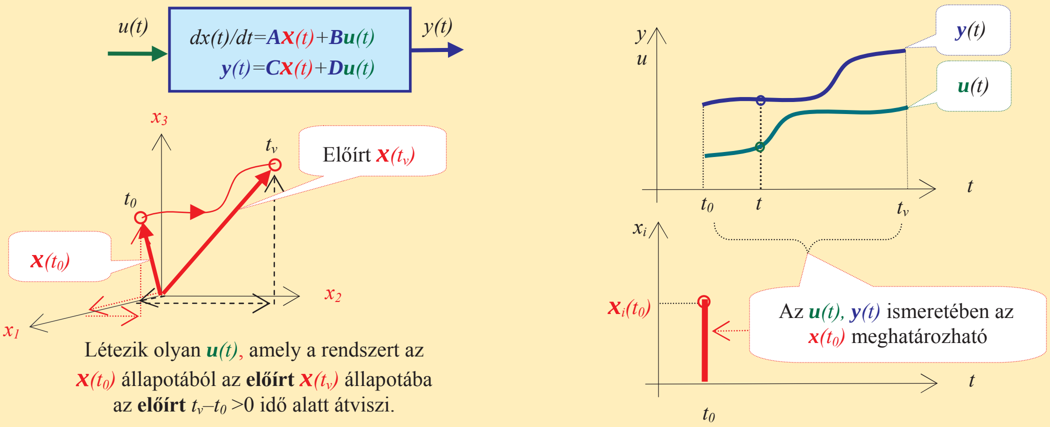
Fontos megjegyeznünk, hogy *sem* az irányíthatóság, *sem* a megfigyelhetőség feltételei *nem igénylik a dinamikus rendszer stabilitását*. Ha pl. egy labilis rendszer ***A, B*** paramétermátrixai

---

4 Az irányítóberendezés számára a folyamat $x_i(t)$ állapotváltozóival arányos $e(t)=Fx(t)$ ellenőrzőjelet érzékelő szervekkel kell előállítani. Ezeket az $u(t)=k_cu_a(t)–\boldsymbol{F}x(t)$, illetve az $u(t)=–\boldsymbol{F}_{LQ}x(t)$ irányítási algoritmus megvalósítása igényli.

5 A dinamikus rendszerek négy alrendszerre történő dekompozícióját, ill. az állapotirányíthatóság és megfigyelhetőség fogalmait és feltételrendszerét *Kalman* dolgozta ki (irodalom: *Kalman,R.E – Ho,Y.C. – Narendra,K.S.*: Controllability of Linear Dynamical Systems, *B. C. Kuo*: Önműködő szabályozó rendszerek, *Dr. Csáki Frigyes*: Fejezetek a szabályozástechnikából. Állapotegyenletek. *Tuschák Róbert*: Szabályozástechnika, *Bokor József – Gáspár Péter*: Irányítástechnika járműdinamikai alkalmazásokkal). Az eredményeket a levezetések mellőzésével adtuk meg. Jelen munkában az állandó paraméterű, lineáris rendszerek irányíthatóságának és megfigyelhetőségének témáival foglalkozunk. A C_o és O_b mátrixok és rangjaik kiszámítása **MATLAB**-támogatással: `Co=ctrb(A,B);Ob=obsv(A,C);rank(Co);rank(Ob);`.

6 Irodalom: *Dr. Csáki Frigyes*: Fejezetek a szabályozástechnikából. Állapotegyenletek. Műszaki könyvkiadó.



a. ábra
Az *állapotirányíthatóság* értelmezése

b. ábra
A *megfigyelhetőség* értelmezése

1. ábra Az állapotirányíthatóság és a megfigyelhetőség fogalmainak szemléltetése

irányítható párt alkotnak (vagyis az A állapotmátrixszal leírt dinamikus rendszer a B mátrixszal szimbolizált bemeneteken keresztül állapotirányítható), akkor a labilis rendszerben is létezik olyan $u(t)$ bemenőjel, amely az állapotváltozót az $x(t_0)$ kezdeti állapotából az előírt $x(t_v)$ állapotába véges idő alatt átviszi. Az már egy más probléma, hogy $t>t_v$ esetében (a dinamikus folyamat labilitása miatt) $x(t)$ minden határon túl növekszik még akkor is, ha $t>t_v$ idő elteltét követően az u gerjesztés zérus.

Az irányíthatóság és megfigyelhetőség fogalmainak bevezetése elvi lehetőséget ad arra, hogy részleteiben áttekinthessük a lineáris rendszer belső struktúráját. *Kálmán* dekompozíciós felosztása a dinamikus rendszert négy alrendszerre bontja attól függően, hogy ezen alrendszerek állapotváltozói irányíthatóak-e, ill. megfigyelhetőek-e? Ezek az alrendszerek: S_{IM} (x_{im} állapotváltozói irányíthatók és megfigyelhetők), S_{IN} (x_{in} állapotváltozói irányíthatók, de nem megfigyelhetők), S_{MN} (x_{mn} állapotváltozói megfigyelhetők, de nem irányíthatók), S_{NN} (x_{nn} állapotváltozói nem irányíthatók és nem megfigyelhetők). Kimutatható, hogy az átviteli mátrix (vagy az átviteli függvény) kizárólag az irányítható és megfigyelhető S_{IM} alrendszer dinamikus sajátosságait fejezi ki, és semmit sem mond a másik három alrendszer viselkedéséről.

Példa

Egy negyedrendű (négy alrendszerből állónak tekinthető) **SISO** dinamikus tag állapotegyenlete ($a_{11}\neq a_{22}\neq a_{33}\neq a_{44}$; $b_1\neq b_2\neq 0$; $c_2\neq c_4\neq 0$ paraméterek esetén):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} dx_1(t)/dt \\ dx_2(t)/dt \\ dx_3(t)/dt \\ dx_4(t)/dt \end{bmatrix}}_{dx(t)/dt} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{[0 \quad c_2 \quad 0 \quad c_4]}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}}_{x(t)}$$

Az állapotegyenletekből közvetlenül leolvasható, hogy $x_1(t)$ irányítható ($b_1\neq 0$), de megfigyelhetetlen ($c_1=0$), $x_2(t)$ **irányítható** ($b_2\neq 0$) **és megfigyelhető** ($c_2\neq 0$), $x_3(t)$ irányíthatatlan ($b_3=0$) és megfigyelhetetlen ($c_3=0$), $x_4(t)$ irányíthatatlan ($b_4=0$), de megfigyelhető ($c_4\neq 0$). Hasonló eredményt ad a C_o irányíthatósági és az O_b megfigyelhetőségi mátrix vizsgálata is. A

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B + D =$$

$$= \underbrace{[0 \quad c_2 \quad 0 \quad c_4]}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} s-a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s-a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s-a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s-a_{44} \end{bmatrix}}_{sI-A}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} =$$

$$= \frac{c_2 b_2}{s-a_{22}} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

átviteli függvényből az olvasható le, hogy az A,B,C,D paramétermátrixok ilyen értékei mellett csupán az S_{IM} irányítható és megfigyelhető részrendszerről tájékoztat. Ha például az $a_{11}=\lambda_1>0$ sajátérték miatt a rendszer labilis, ez a tulajdonság az átviteli függvényben nem jelenik meg.

Példa

A dinamikus, másodrendű rendszer állapotegyenlete ($a\neq b\neq g\neq 0$ paraméterekkel) és átviteli függvénye:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ab & -a-b \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{[g \quad 1]}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B = [g \quad 1] \begin{bmatrix} s & -1 \\ ab & s+a+b \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s+g}{(s+a)(s+b)}.$$

Az irányíthatósági, a megfigyelhetőségi és a kimeneti irányíthatósági mátrix:

$$C_o = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a-b \end{bmatrix}, O_b = [C^T \quad A^T C^T] =$$

$$= \begin{bmatrix} g & -ab \\ 1 & g-a-b \end{bmatrix}, C_y = [C \quad CAB] = [1 \quad g-a-b]$$

Ha $g=a$ vagy $g=b$, akkor az állapotegyenletek változatlanok maradnak, a C_o irányíthatósági mátrix megtartja a 2 rangját, ellenben a megfigyelhetőségi mátrix rangja 2-ről 1-re csökken ($g=a$ vagy $g=b$ paraméter esetén az O_b megfigyelhetőségi mátrix szinguláris, $det(O_b)=0$). Ekkor az átviteli függvény $-g$ zérusa közömbösíti (egyszerűsítéssel kiejti) $W(s)$ $-a$ vagy $-b$ pólusát, és emiatt a rendszer nem megfigyelhető. A kimeneti irányíthatósági mátrix rangja a g paramétertől függetlenül 1 – és mivel ez azonos a kimenőjelek számával –, a rendszer kimenetileg is irányítható.

Az állapottranszformáció

Az állapotegyenletével leírt dinamikus folyamat $x(t)$ állapotvektorának komponensei az $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ állapotváltozók. A dinamikus folyamat leírására olyan új $x_T(t)$ állapotvektor vezethető be, amelynek $x_{Ti}(t)$ komponensei az eredeti rendszer $x_i(t)$ állapotváltozóinak súlyozott, lineáris kombinációi[7]. Részletezve:

$$\begin{aligned} x_{T1}(t) &= T_{11}x_1(t)+T_{12}x_2(t)+\ldots+T_{1n}x_n(t) \\ x_{T2}(t) &= T_{21}x_1(t)+T_{22}x_2(t)+\ldots+T_{2n}x_n(t) \\ \ldots \quad &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{Tn}(t) &= T_{n1}x_1(t)+T_{n2}x_2(t)+\ldots+T_{nn}x_n(t) \end{aligned}$$

Mátrix alakban az új állapotvektor $x_T(t)=Tx(t)$, ahol T egy *tetszőleges*, reguláris (invertálható, vagyis $det(T)\neq 0$) $n \times n$ méretű *transzformációs* mátrix:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{T1}(t) \\ x_{T2}(t) \\ \vdots \\ x_{Tn}(t) \end{bmatrix}}_{x_T(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \cdots & T_{nn} \end{bmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)}$$

Az $\boldsymbol{x}_T(t)=Tx(t)$ jelölésnek megfelelően $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}_T(t)=T^{-1}Tx(t)=\boldsymbol{x}(t)$. Ennek figyelembevételével a transzformált rendszer új állapotegyenletét az eredeti állapotegyenletből az $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}_T(t)$ helyettesítéssel kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T^{-1}x_T(t) &= AT^{-1}x_T(t)+Bu(t) \\ T^{-1}\frac{dx_T(t)}{dt} &= AT^{-1}x_T(t)+Bu(t) \\ y(t) &= CT^{-1}x_T(t)+Du(t) \end{aligned}$$

A helyettesítéssel kapott vektor-differenciálegyenletet a T transzformációs mátrix kifejezésével *balról* beszorozva (figyelembe véve, hogy $TT^{-1}=I$ az egységmátrix) a transzformált rendszer állapotegyenletét kapjuk az új $x_T(t)$ állapotvektorral:

$$\begin{aligned} \frac{dx_T(t)}{dt} &= TAT^{-1}x_T(t)+TBu(t) = A_Tx_T(t)+B_Tu(t) \\ y(t) &= CT^{-1}x_T(t)+Du(t) \quad = C_Tx_T(t)+D_Tu(t) \end{aligned}$$

ahol:

$$A_T = TAT^{-1} \quad B_T = TB \quad C_T = CT^{-1} \quad D_T = D$$

Miután az eredeti $x(t)$ állapotvektor helyett az új $x_T(t)$ állapotvektort vezettük be, az átalakított rendszer új $\boldsymbol{A}_T$, $\boldsymbol{B}_T$, $\boldsymbol{C}_T$, $\boldsymbol{D}_T$ paramétermátrixai a T transzformációs mátrix és az eredeti A, B, C, D paramétermátrixok ismeretében – egyszerű mátrixműveletekkel – meghatározhatók. A transzformáció az eredeti rendszer A állapotmátrixának λ_i sajátértékeit, ill. az $u(s)$ bemenő- és $y(s)$ kimenőjelek közötti kapcsolatokat leíró $W(s)=y(s)/u(s)$ átviteli függvényt természetesen *változatlanul* hagyja. *Az új $x_T(t)$ állapotvektor bevezetésének az ad értelmet, hogy a* $\boldsymbol{T}$ *megfelelő megválasztásával az* $\boldsymbol{A}_T=\boldsymbol{TAT}^{-1}$ *transzformált állapotmátrix az eredeti A állapotmátrixhoz képest egyszerűbb (például* ***diagonális****) alakot ölthet.* Ilyen egyszerűbb alakok a **diagonális**, az **irányíthatósági**, a **megfigyelhetőségi**, a **fázisváltozós**, az **alsóháromszög**, a **felsőháromszög** *kanonikus* alakok[8].

A kanonikus alakok jellemző tulajdonságai, hogy az új $x_T(t)=Tx(t)$ állapotváltozók bevezetésével (az állapottranszformációval) az eredeti rendszer A állapotmátrixát $A_T=TAT^{-1}$ transzformált kanonikus alakra hozható. Ezen alakokban a diagonális, az alsó és felső háromszög mátrixok főátlóiban az A állapotmátrix λ_i sajátértékei találhatók, az irányíthatósági, a megfigyelhetőségi és a fázisváltozós alakokban pedig az A mátrix karakterisztikus polinomjának $-h_1, -h_2, \ldots, -h_n$ negatív együtthatói játszanak szerepet. A diagonális alakra hozó transzformáció a legfontosabb kanonikus alak, mivel ez a transzformált állapotegyenlet megoldását igen egyszerűvé és szemléletessé teszi. A kanonikus alakra hozó T mátrix meghatározására analitikus megoldóképleteket lehet levezetni, jelen munkában a MATLAB által felkínált módszerekkel dolgozunk.

A dinamikus rendszer A állapotmátrixának kanonikus alakjait a következő részben ismertetjük.

(Folytatjuk!)

szbela12@gmail.com, fjuhaszne@gmail.com

7 A fizikai objektum természeti törvényei alapján választott $x_i(t)$ állapotváltozóinak rendszerint van fizikai jelentésük is (pl. *áram* [A], *feszültség* [V], *erő* [N], *elmozdulás* [m], *elfordulás* [rad], *sebesség* [m/s], *szögsebesség* [rad/s], *fordulatszám* [ford/perc], *gyorsulás* [m/s^2], *szöggyorsulás* [rad/s^2], *hőmérséklet* [^{0}C], *nyomás* [N/m^2], *térfogatsebesség* [m^3/s] stb.). Az új $x_{Ti}(t)$ állapotváltozóknak (amelyek az előzőek lineáris kombinációi) ilyen jelentés nem adható. Az állapotváltozók az időben lejátszódó rendszerállapotok (a múltnak és a jelennek a jövőre vonatkozó hatásának) megítélését teszik lehetővé, segítségükkel a dinamikus rendszer átmeneti folyamatai szemléltethetők.

8 A fázisváltozós, ill. a megfigyelhetőségi alakokat *Frobenius*-alakoknak is nevezik. A T reguláris transzformációs mátrixot ugyan szabadon felvehetjük, de a transzformációnak jelentősége akkor van, ha T olyan $A_T=TAT^{-1}$ mátrixot eredményez, amely a dinamikus rendszer analízisét leegyszerűsíti és ezzel elősegíti. Ezek elsősorban a *diagonális* és az *irányíthatósági* kanonikus alakok.