Szabályozástechnika 31.

Állapotirányítás, állapotirányítás megfigyelővel, optimális (LQR) irányítás – 1.

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencné

A szabályozási struktúra soros kompenzációval megvalósuló realizálása során a folyamattal soros kapcsolást alkotó szabályozó paramétereinek célszerű megválasztásával alakíthatjuk a felnyitott és a zárt kör eredő jelátviteli tulajdonságait. Egy másik elv szerint a folyamat állapotváltozóinak a bemenetre történő visszacsatolásával tudunk befolyást gyakorolni a rendszer dinamikus tulajdonságaira, ezzel megvalósítva az előírásoknak megfelelő működést.

Bevezetés

A klasszikus, *soros kompenzációs* szabályozási rendszer az $y(t)$ szabályozott jellemző *negatív visszacsatolásának elvére* épül. A szabályozás alapfeladata a megfelelő mértékű **zavarelhárítás** (a zavarójelek ne, vagy csak a megengedett mértékben befolyásolják a szabályozott jellemzőt) és a **követés**[1] (az u_a alapjel által megjelenített $y_A(t)$ alapértéket az $y(t)$ szabályozott jellemző minél kisebb hibával legyen képes másolni). A szabályozó különbségképző bemenete állítja elő a $h(t)=u_a(t)–y(t)$ hibajelet, és ennek alapján – a szabályozási algoritmus előírásának megfelelően – befolyásolja a folyamat $u(t)$ irányítójelét, ill. ezen keresztül az $y(t)$ szabályozott jellemzőt [$u(s)=\mathbf{W}_c(s)h(s) \rightarrow y(s)=W_p(s)u(s) \rightarrow y(s)=W_p(s)W_c(s)h(s)$]. A rendszer méretezése – a folyamat $W_p(s)$ átviteli függvényének ismeretében – a szabályozó $W_c(s)$ átviteli függvényével reprezentált *szabályozási algoritmus* meghatározását igényli, figyelembe véve a zárt rendszerrel szemben támasztott minőségi követelményeket (stabilitás, túllendülés, szabályozási idő, statikus és dinamikus hiba stb.). A gyakorlatban alkalmazott méretezési elv ekkor a nyitott kör $W_0(j\omega)=W_c(j\omega)W_p(j\omega)$ frekvenciafüggvényének $\varphi_t(\omega_c)\approx\pi/3$ (60^0) fázistöbbletre vonatkozó előírására épül, és a szabályozó **P**, **I**, **PI**, **PD**, **PID** vagy **PIPD** dinamikus struktúráinak kialakításához vezet (lásd 1a. ábra).

Az állapotirányítás struktúrája

A negatív visszacsatolás elvének egy másik alkalmazása a folyamat $x_i(t)$ állapotváltozóinak a bemenetre történő negatív visszacsatolása (lásd 1b. ábra). Ebben az **állapotvisszacsatolást** tartalmazó struktúrában az irányító jelet az

$$u(t)=\boldsymbol{k}_c u_a(t)–\boldsymbol{f}_1 x_1(t)–\boldsymbol{f}_2 x_2(t)–\ldots–\boldsymbol{f}_n x_n(t)=k_c u_a(t)–Fx(t)$$

algebrai kifejezésnek megfelelő algoritmus szerint állítjuk elő, ahol $\boldsymbol{f}_i$ a folyamat $x_i(t)$ állapotváltozóiról létesített *negatív* visszacsatolás átviteli tényezői (i=1, 2, …, *n, ahol n* az állapotváltozók száma, a folyamat rendszáma). A visszacsatolások elé sorosan beiktatott $\boldsymbol{k}_c$ korrekciós átviteli tényezővel az y és u_a jelek közötti *dc*-erősítést[2] lehet tetszőleges értékre beállítani. Ebben az esetben is követelményeket fogalmazhatunk meg a *rendszer* dinamikus tulajdonságaira, és ennek alapján keressük a $\boldsymbol{f}_i$ átviteli tényezőket és a $\boldsymbol{k}_c$ erősítést. A méretezési követelmények ez esetben az eredő rendszer p_{Ri} *póluseloszlására* vagy egy $J(x,u)$ ún. *költségfüggvény* minimalizálására vonatkozhatnak. Az analízis módszere ekkor elsődlegesen az időtartománybeli viselkedést szemléletesen megjelenítő (az $x(t)$ állapotvektort közvetlenül is tartalmazó) állapotegyenletek[3] felhasználására épül.

A lineáris folyamat leírása az állapottérben

A

$$\frac{dx(t)}{dt}=f[x(t),u(t)]=Ax(t)+Bu(t)$$
$$y(t)=g[x(t),u(t)]=Cx(t)+Du(t)$$

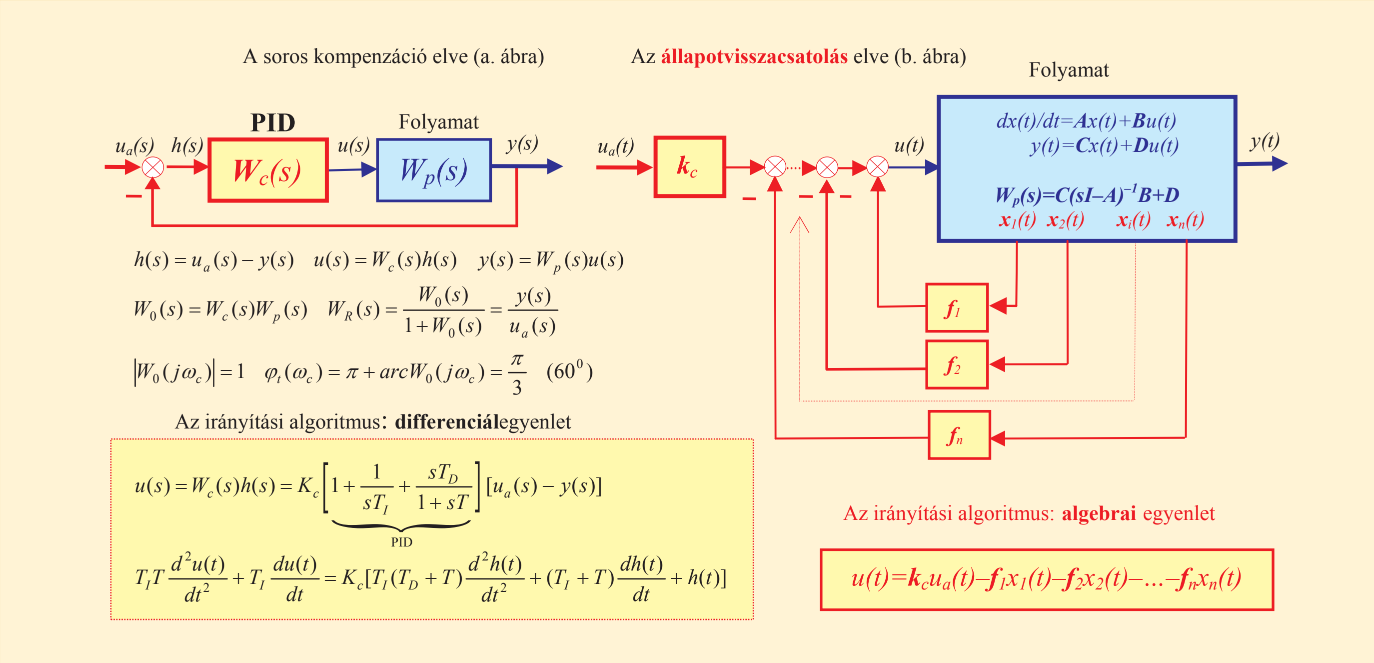
állapotegyenletével leírt n rendszámú **LTI SISO**[4] szabályozott *folyamat* $u(t)=\mathbf{1}(t)$ egységugrás irányítójelre adott $x(t)$ állapotvektorának és $y(t)=v_p(t)$ átmeneti függvényének tranziens viselkedését a folyamat $\boldsymbol{A}$ állapotmátrixának λ_i sajátértékei (a $H_p(\lambda)=det(\lambda I–\boldsymbol{A})=0$ karakterisztikus egyenletének λ_i gyökei), ill. a $W_p(s)=C(sI–A)^{-1}B+D$ átviteli függvényének p_i pólusai determinálják ($p_i=\lambda_i$). A folyamat sajátmozgásának vagy a $v_p(t)$ átmeneti függvényének ($u(t)=\mathbf{1}(t)$ egységugrásra adott $y(t)=v_p(t)$ válaszának) tranziens összetevői ugyanis az időben $exp(p_i t)$ szerint változnak. A *folyamat* állapotegyenletének felvételekor $\boldsymbol{D}$=0 feltételezéssel élünk, mivel a folyamatok *átmeneti* függvényei általában $v_p(0)=0$ értékről indulnak. Ennek jelentése az, hogy az $u(t)$ gerjesztés direkt módon *nem* (hanem kizárólag csak az $x(t)$ állapotvektoron keresztül) befolyásolja az $y(t)$ szabályozott jellemzőt (ekkor a folyamat $W_p(s)=G_p(s)/H_p(s)$ átviteli függvényének $G_p(s)$ számlálója a $H_p(s)$ nevezőjénél *alacsonyabb* fokszámmal

1 Az 1a. ábrán látható $y(t)$ ún. merev visszacsatolás esetében az érzékelés átviteli tényezője A_E=1. Ekkor az $u_a(t)=A_E y_A(t)=y_A(t)$ *alapjel* azonos a szabályozott jellemző előírt $y_A(t)$ *alapértékével*. A **PID-**szabályozó matematikai modellje a $W_c(s)$ átviteli függvény vagy az ebből származtatható, másodrendű, állandó együtthatójú, lineáris differenciálegyenlet. Paraméterei a K_c átviteli tényező, a T_I integrálási, valamint a T_D differenciálási idők és a differenciáló csatorna T időállandója. A **PID-**szabályozó átviteli függvényének *két zérusával* a folyamat átviteli függvényének *két pólusát* lehet „mintegy áthelyezni”. A tranziensek komponensei $exp(p_{Ri}t)$-szerint kialakuló időfüggvények, ahol p_{Ri} a *zárt* rendszer $W_R(s)$ átviteli függvényének pólusai.

2 *dc*-erősítés: az y szabályozott jellemző és az u_a alapjel közötti k_R átviteli tényező, állandósult állapotban $y_0=k_R u_{a0}$.

3 Az irányítható és megfigyelhető folyamat állapotegyenlete és átviteli függvénye egymással egyenértékűen írják le az u irányítójel és az y szabályozott jellemző közötti függvénykapcsolatot (lásd a dinamikus rendszer *Kálmán* által kidolgozott alrendszerekre történő dekompozíciós felosztását).

4 **SISO-**tag esetében: $\boldsymbol{A}$: $n\times n$ **mátrix**, $\boldsymbol{B}$: $n\times 1$ **oszlop**vektor, $\boldsymbol{C}$: $1\times n$ **sor**vektor, $\boldsymbol{D}$: 1×1 skaláris és gyakran D=0. A $\boldsymbol{C}$ sorvektort az irodalom általában oszlopvektor transzponáltjának is jelöli $C=c^T$.



1. ábra A szabályozás soros kompenzációt és állapotirányítást tartalmazó hatásvázlatai

rendelkezik, vagyis $W_p(s)$-nek legalább egy pólustöbblete van). Az állapotegyenlet a folyamat n rendszámú, állandó együtthatójú, a vezető együtthatóra normalizált

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+h_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+h_n y(t)=$$
$$=g_0\frac{d^m u(t)}{dt^m}+g_1\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+g_m u(t) \qquad m<n$$

lineáris differenciálegyenletéből vagy az ennek megfelelő

$$W_p(s)=\frac{g_0s^m+g_1s^{m-1}+\cdots+g_{m-1}s+g_m}{s^n+h_1s^{n-1}+\cdots+h_{n-1}s+h_n}=$$
$$=\frac{G_p(s)}{H_p(s)}=C(sI-A)^{-1}B=\frac{y(s)}{u(s)} \qquad m<n$$

átviteli függvényéből *is* származtatható (lásd az átviteli függvény különféle felbontásait). A sajátmozgás és a $v_p(t)$ átmeneti függvény tranziensei $exp(p_it)$ szerint kialakuló időfüggvények, ahol p_i a folyamat $W_p(s)$ átviteli függvényének pólusai (lásd 2. ábra).

Ezek az $exp(p_it)$ szerint kialakuló tranziensek aperiodikusan vagy lengéseket tartalmazva $t\to\infty$ mellett „lecsengenek", ha a p_i pólusok mindegyikére $real(p_i)<0$. Ekkor a folyamat *aszimptotikusan stabilis*. Ha $v_p(\infty)=v_{p0}=-CA^{-1}B=k_p=$*állandó*$\neq 0$, akkor *önbeálló*[5]. A folyamat átviteli függvénye és karakterisztikus polinomja a paramétermátrixok ismeretében:

$$W_p(s)=[C(sI-A)^{-1}B+D]_{D=0}=\boldsymbol{C}(sI-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=G_p(s)/H_p(s)=y(s)/u(s)$$
$$H_p(s)=det(sI-A)=(s-\boldsymbol{p}_1)(s-\boldsymbol{p}_2)\ldots(s-\boldsymbol{p}_n)=s^n+\boldsymbol{h}_1s^{n-1}+\ldots+\boldsymbol{h}_{n-1}s+\boldsymbol{h}_n$$

5 $k_p=-CA^{-1}B=g_m/h_n$ a folyamat átviteli tényezője, *dc* az erősítése.

Az állapotvisszacsatolás elve

A $\boldsymbol{p}_i$ pólusokkal rendelkező **SISO-**folyamat $x(t)$ állapotvektoráról az $u(t)$ bemenetre létesített $\boldsymbol{F}x(t)$ *negatív visszacsatolással* ($\boldsymbol{F}=[f_1f_2\ldots f_n]$ a visszacsatolás átviteli tényezőjének **sorvektora**, ***F****eedback*) létrehozott eredő struktúrában a skaláris irányító jel $u(t)=\boldsymbol{k}_cu_a(t)-\boldsymbol{F}x(t)$, ahol $u_a(t)$ az állapotvisszacsatolt *rendszer* bemenő alapjele, $\boldsymbol{k}_c$ egy *skaláris* korrekciós átviteli tényező[6] (lásd 1b. és 3a. ábra).

Az eredő rendszer leírására (azonos hatásvázlat-algebrai átalakításokat alkalmazva) a 3b. ábrán látható hatásvázlat kapható.

A visszacsatolt struktúrában a folyamat n számú integráló alaptagjának belső (A, nem hozzáférhető) és külső (BF, az $\boldsymbol{F}$ sorvektorral befolyásolható), egymással *párhuzamos* kapcsolást alkotó visszacsatolása van (lásd 3a. ábra). Az integráló alaptag *eredő* visszacsatolásának $n\times n$ méretű állapotmátrixa ennek megfelelően $\boldsymbol{A}_R=A-B\boldsymbol{F}$, az $n\times 1$ méretű *eredő bemeneti mátrixa* (oszlopvektora) $\boldsymbol{k}_cB$. Az állapotvisszacsatolt *folyamat* (az eredő *rendszer*) egyenértékű átalakításokkal kapható hatásvázlata a 3a. ábrából származtatható (lásd 3b. ábra).

Az *eredő* rendszer *átviteli függvénye* és *karakterisztikus polinomja* az átalakított hatásvázlat alapján:

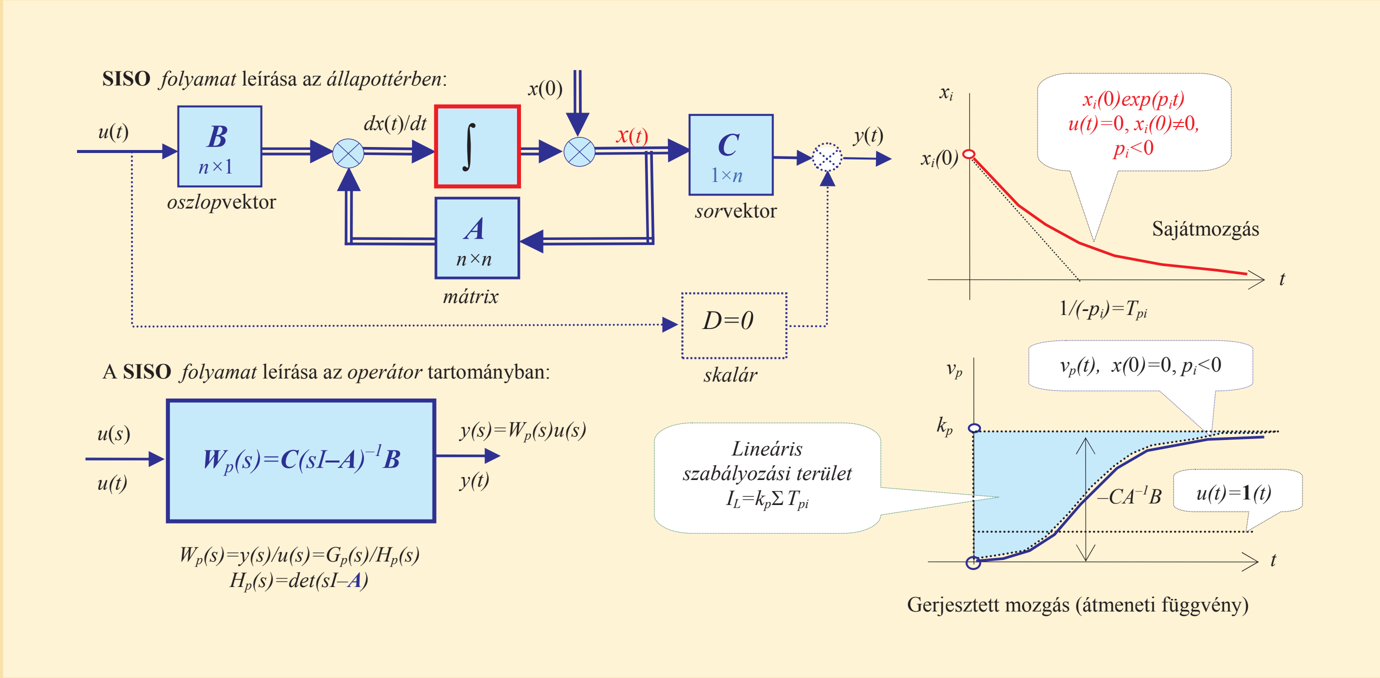
$$W_R(s)=C(sI-(A-B\boldsymbol{F}))^{-1}B\boldsymbol{k}_c=G_R(s)/H_R(s)=y(s)/u_a(s)$$
$$H_R(s)=det[sI-(A-B\boldsymbol{F})]=(s-\boldsymbol{p}_{R1})(s-\boldsymbol{p}_{R2})\ldots(s-\boldsymbol{p}_{Rn})=$$
$$=s^n+\boldsymbol{h}_{R1}s^{n-1}+\ldots+\boldsymbol{h}_{R(n-1)}s+\boldsymbol{h}_{Rn}\,.$$

Az előírt p_{Ri}-póluseloszlásra történő tervezés elve

Az **állapotvisszacsatolt** rendszer $W_R(s)$ eredő átviteli függvénynek a $\boldsymbol{p}_{Ri}$ pólusai – a $H_R(s)=det[sI-(A-B\boldsymbol{F})]=0$ karakterisztikus egyenletének p_{Ri} gyökei, az A_R állapotmátrix $\lambda_{Ri}=p_{Ri}$ sajátértékei – $\boldsymbol{F}$ megfelelő megválasztásával *szabadon előírhatók*[7]. Ezzel az **elő-**

6 Az $\boldsymbol{F}$ visszacsatolás miatt a rendszer (folyamathoz képesti) dinamikus tulajdonságain kívül a *statikus* tulajdonságai is megváltoznak. A k_c átviteli tényezővel az y és az u_a jelek közötti $k_R=y_0/u_{a0}$ *dc* átviteli tényező tetszőleges értékre beállítható.

7 Ez a tervezési eljárás azon az elven alapszik, hogy a zárt rendszer $W_R(s)$ eredő átviteli függvényének póluseloszlását (karakterisztikus egyenletének p_{Ri} gyökeit) *méretezési előírásnak* tekintjük. Jelen esetben azonban nem a klasszikus soros kompenzációs szabályozással, hanem az *állapotváltozóknak a bemenetre történő negatív visszacsatolásával* elégítjük ki az *állapotvisszacsatolt rendszerre* vonatkozó tervezési előírásokat. Az állapotvisszacsatolás



2. ábra. A folyamat különféle matematikai modelljei

írt $\boldsymbol{p}_{Ri}$ pólusokkal az ***eredő rendszer*** tranziensei időben $exp(p_{Ri}t)$ szerint változnak, $\boldsymbol{p}_{Ri}$<<0 választásával $t\rightarrow\infty$ esetén tetszőlegesen gyorsan „lecsengenek", a folyamat esetleges labilis p_i pólusai *helyett* stabilis $\boldsymbol{p}_{Ri}$ pólusok választhatók, a lineáris szabályozási terület lecsökkenthető stb. (lásd 3b. ábra). A ***látszat*** az, mintha az állapotvisszacsatolással a folyamat eredeti p_i pólusait a rendszer $\boldsymbol{p}_{Ri}$ pólusaira „cseréltük" volna fel (pólusallokáció). A hatásvázlattal modellezett fizikai rendszer valóságos működésekor természetesen nem a pólusok cseréje valósul meg, hanem az $u(t)$ irányítójel *túlvezérlése* (és ennek alkalmas módon történő „visszavétele") hozza létre a visszacsatolt folyamat tranzienseinek a felgyorsulását. Mindezek miatt a p_i pólusoknak a gyorsabb tranzienseket eredményező $\boldsymbol{p}_{Ri}$ pólusokra történő „cseréje" (az indokolatlan mértékű túlvezérlések elkerülése miatt) *mértéktartást* igényel. Ez a mértéktartás arra vonatkozhat, hogy a folyamat egyébként is gyorsan lecsengő tranzienseket eredményező p_i<<0 pólusait ne változtassuk meg.

Ha a folyamat, ill. a visszacsatolt rendszer állapotegyenletei az *irányíthatósági kanonikus alakban* állnak rendelkezésünkre (lásd az átviteli függvény ún. *közvetlen* felbontását, aminek sajátossága az integráló tagok *láncolatát* alkotó struktúrája), akkor a folyamat adott $H_p(s)=det(sI–A)=0$ karakterisztikus egyenletéből és a rendszer méretezési előírásait is tartalmazó $H_R(s)= =det[sI–(A–B\boldsymbol{F})]=0$ karakterisztikus egyenletének követelményrendszeréből az $\boldsymbol{F}$ visszacsatoló sorvektor komponensei egyszerűen (a karakterisztikus egyenletek együtthatóinak összehasonlításával) meghatározhatók[8].

Az önbeálló folyamat eredeti $k_p=y_0/u_0$ és a visszacsatolt rendszer $k_R=y_0/u_{a0}$ *dc*-erősítései (skaláris átviteli tényezői): $k_p=–CA^{–1}B$, ill. $k_R=–C(A–B\boldsymbol{F})^{–1}B\boldsymbol{k}_c$. Ha az állapotvisszacsatolt rendszer k_R erősítésére meg kívánjuk tartani a folyamat *eredeti* k_p erősítését, akkor – az $\boldsymbol{F}$ meghatározását követően – a $\boldsymbol{k}_R=\boldsymbol{k}_p$ feltételből k_c meghatározható:

$$k_c= [C(A–BF)^{–1}B]^{–1}\ CA^{–1}B\ .$$

Előírhatjuk azonban azt is, hogy a rendszer $y(t)$ kimenőjelének y_0 állandósult értéke az alapjel u_{a0} állandósult értékével legyen azonos. Ekkor $y_0=k_Ru_{a0}=u_{a0}\rightarrow k_R=1$ és $k_c=[–C(A–BF)^{–1}B]^{–1}$.

Az előírt költségfüggvény minimalizálására vonatkozó tervezés elve (LQR-irányítás)

A folyamat $x(t)$ állapotvektoráról a bemenetre létesített $–\boldsymbol{F}_{LQ}x(t)$ állapotvisszacsatolással ($\boldsymbol{F}_{LQ}=[f_{LQ1}\ f_{LQ2}\ ...\ f_{LQn}]$ az ún. **LQR**-irányítás[9] állapotvisszacsatolásának átviteli tényezője, sorvektor) keletkezett eredő struktúrában az irányítójel $u(t)=–\boldsymbol{F}_{LQ}x(t)$ (3c. ábra).

Megjegyzés

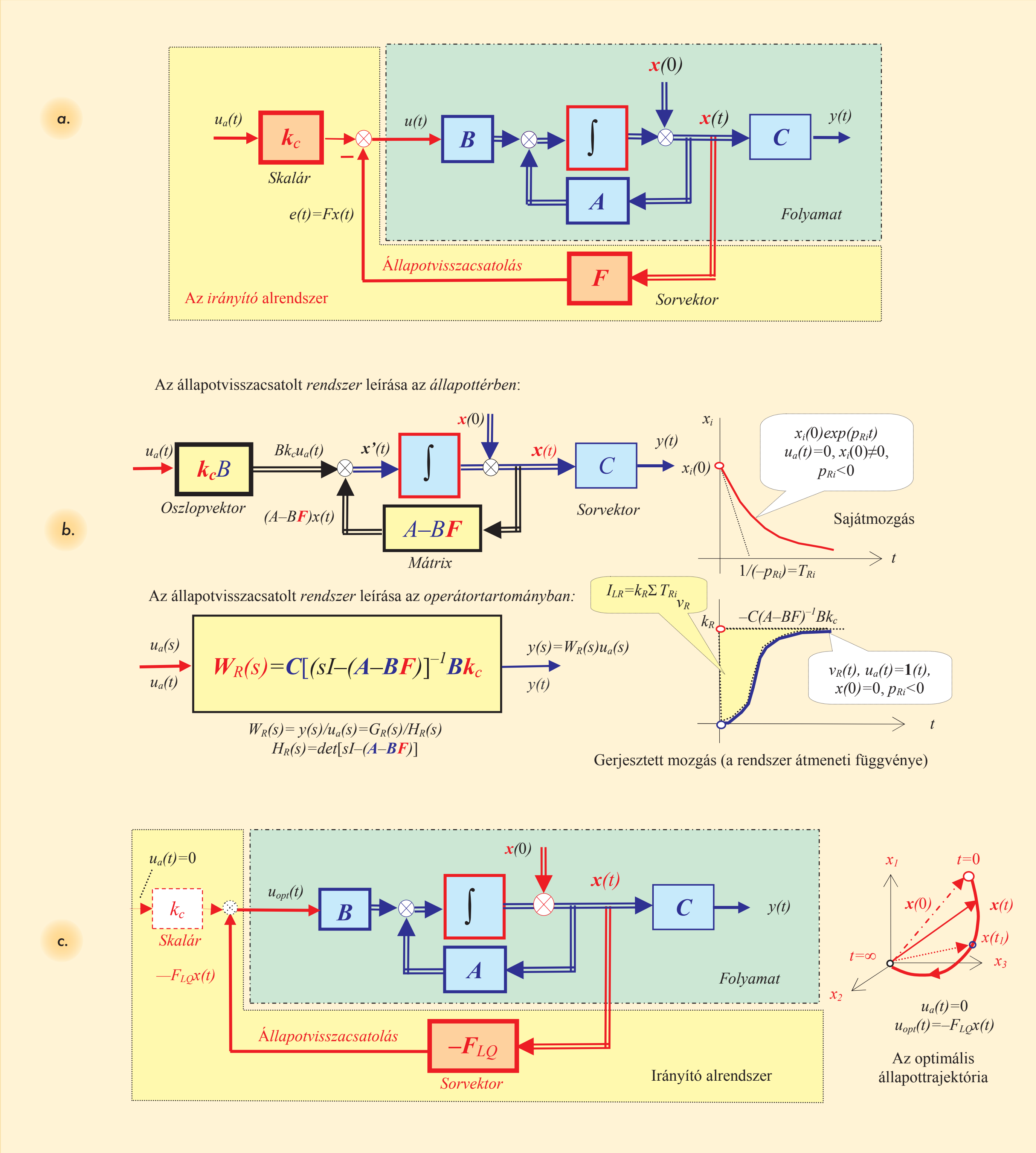
Az **LQR**-irányítási rendszert arra az esetre vizsgáljuk, amikor az u_a bemenőjel zérus ($u_a(t)=0$), vagyis a rendszer sajátmozgását az $x(t)$ állapotváltozók $x(0)\neq 0$ kezdeti értékei generálják. Az $u_a(t)\neq 0$ eset tárgyalására irodalmi hivatkozást adunk[10]. Figyeljük meg, hogy a pólusallokáció és az LQR-irányítás hatásvázlatstruktúrája egymással azonos, a különbözőségük a állapotváltozók f_{LQi} visszacsatolásai átviteli tényezőinek megválasztásában van.

alkalmazásával a folyamat bármelyik pólusát „át lehet helyezni" egy tetszőleges helyre, a hagyományos **PIPD** soros kompenzáció ezzel szemben általában a folyamat két pólusának „áthelyezését" valósítja meg.

8 Általános esetben az $\boldsymbol{F}$ sorvektor meghatározására az *Ackermann*-formula használható. Ez a folyamat *A, B* paramétermátrixainak, valamint az állapotvisszacsatolt rendszer előírt $\boldsymbol{p}_{Ri}$ pólusainak ismeretében kiszámítja az $\boldsymbol{F}$ visszacsatoló sorvektor minden komponensét. **MATLAB**-támogatás $\boldsymbol{F}$ meghatározására: `F=acker(A,B,pR)` vagy `F=place(A,B,pR)`. A folyamat $W_p(s)$ átviteli függvényéből (a $W_p(s)$ ún. közvetlen felbontásából) származtatható a folyamat állapotegyenletének irányíthatósági kanonikus alakja. **MATLAB**-támogatás a $W_p(s)=G_p(s)/H_p(s)$ átviteli függvényű *folyamat* állapotegyenletének *irányíthatósági* kanonikus alakban történő meghatározására: `[A,B,C,D]=tf2ss(Gp,Hp)`.

9 Az **LQR**- (***L****inear* ***Q****uadratic* ***R****egulator*) -megjelölésen kívül az irodalom az **LQ**-jelölést is használja.

10 *Bokor József – Gáspár Péter*: Irányítástechnika járműdinamikai alkalmazásokkal. Typotex kiadó.



*3. ábra a. A **SISO**-folyamat állapotirányításának hatásvázlat-struktúrája*
b. Az eredő rendszer egyenértékű hatásvázlata és dinamikus tulajdonságai
c. Az LQR-irányítás hatásvázlata és állapottrajektóriája

Az F_{LQ} átviteli tényezőt most egy $0<t<t_v=\infty$ időintervallumra vonatkozó

$$J(x,u)=\frac{1}{2}\int_{t=0}^{t_v=\infty}[x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t)]dt=\underbrace{\min}_{u_{opt}(t)}$$

költségfüggvény (összetett optimalizálási kritérium, kvadratikus funkcionál)[11] minimalizálásának feltétele alapján számítjuk.

A következő részekben elsődlegesen az állapotvisszacsatolásnak azt a kérdéskörét tárgyaljuk, amikor méretezési előírás az eredő rendszer előírt pólusai, és ennek teljesítésére kell megválasztani az állapotvisszacsatolás F átviteli tényezőjének sorvektorát.

szbela12@gmail.com, fjuhaszne@gmail.com

11 **LQR**-funkcionál: egy adott függvényhez egy másik függvényt rendel megadott szabálynak megfelelően.