

Szabályozástechnika 36.

Állapotirányítás, állapotirányítás megfigyelővel, optimális (LQR) irányítás – 6.

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencé

Folytatjuk a harmadrendű SISO-tag állapotirányításának méretezését. Az irányíthatósági kanonikus alaknak megfelelő hatásvázlat állapotváltozóiról létesített visszacsatolást az 1. ábra mutatja. A folyamat eredeti pólusai a p_i : $-1, -2, -3$ értékek, amelyeket az állapotvisszacsatolás f_1, f_2, f_3 átviteli tényezőinek megfelelő megválasztásával a p_{Ri} : $-3, -6, -9$ értékekre kívánunk áthelyezni. Az állapotvisszacsatolás méretezésének egy általános eljárását (Ackermann-képlet) és egy, az irányíthatósági kanonikus alakra épített egyszerű módszerét tárgyaljuk. Bemutatjuk az állapotvisszacsatolás megoldásának azt a megoldását is, amikor nem a folyamat tényleges $x(t)$ állapotváltozóiról, hanem ezeknek egy megfigyelővel becsült $x^*(t)$ értékeiről létesítjük a visszacsatolást.

A rendszer $H_R(\lambda)=0$ karakterisztikus egyenlete az adott $p_{R1}=-3, p_{R2}=-6, p_{R3}=-9$ követelmények mellett:

$$\begin{aligned} \det[\lambda I - (A - BF)] &= H_R(\lambda) = \\ &= (\lambda - p_{R1})(\lambda - p_{R2})(\lambda - p_{R3}) = \\ &= \lambda^3 + h_{R1}\lambda^2 + h_{R2}\lambda + h_{R3} = \\ &= (\lambda + 3)(\lambda + 6)(\lambda + 9) = \lambda^3 + 18\lambda^2 + 99\lambda + 162. \end{aligned}$$

Mindezek figyelembevételével az F értékét számítsuk az Ackermann-formula segítségével, a k_c és u_t értékeit pedig a levezetett összefüggések alapján. Az F, u_t és k_c képleteiből láthatóan $n \gg 1$ esetén bonyolult mátrixműveletek alkalmazásáról van szó, ami a MATLAB felhasználását indokolta teszi:

```
F = [0 0 1] * C0^-1 * HR(A) =
    = [0 0 1] * [B AB A^2B]^-1 * [A^3 + hR1A^2 + hR2A + hR3I]

k_c = [C(A - BF)^-1 B]^-1 * CA^-1 B

u_t = [1 + F(A - BF)^-1 B]^-1 .
```

MATLAB-támogatással számolva¹:

```
syms h1 h2 h3 g3 hR1 hR2 hR3 real
A = [-h1 -h2 -h3; 1 0 0; 0 1 0]; B = [1 0 0]';
C = [0 0 g3]; D = 0; % A paramétermátrixok
Co = [B A*B A^2*B]; % Az irányíthatósági mátrix
HR = [1 hR1 hR2 hR3]; % Karakterisztikus polinom
HRA = polyvalm(HR, A); % Az A^3 + hR1A^2 + hR2A + hR3I mátrix
F = [0 0 1] * inv(Co) * HRA; % A F visszacsatolás
% A dc erősítés
kc = inv(C * inv(A - B * F) * B) * C * inv(A) * B;
% A túlvezérlési arány
ut = inv(1 + F * inv(A - B * F) * B);
```

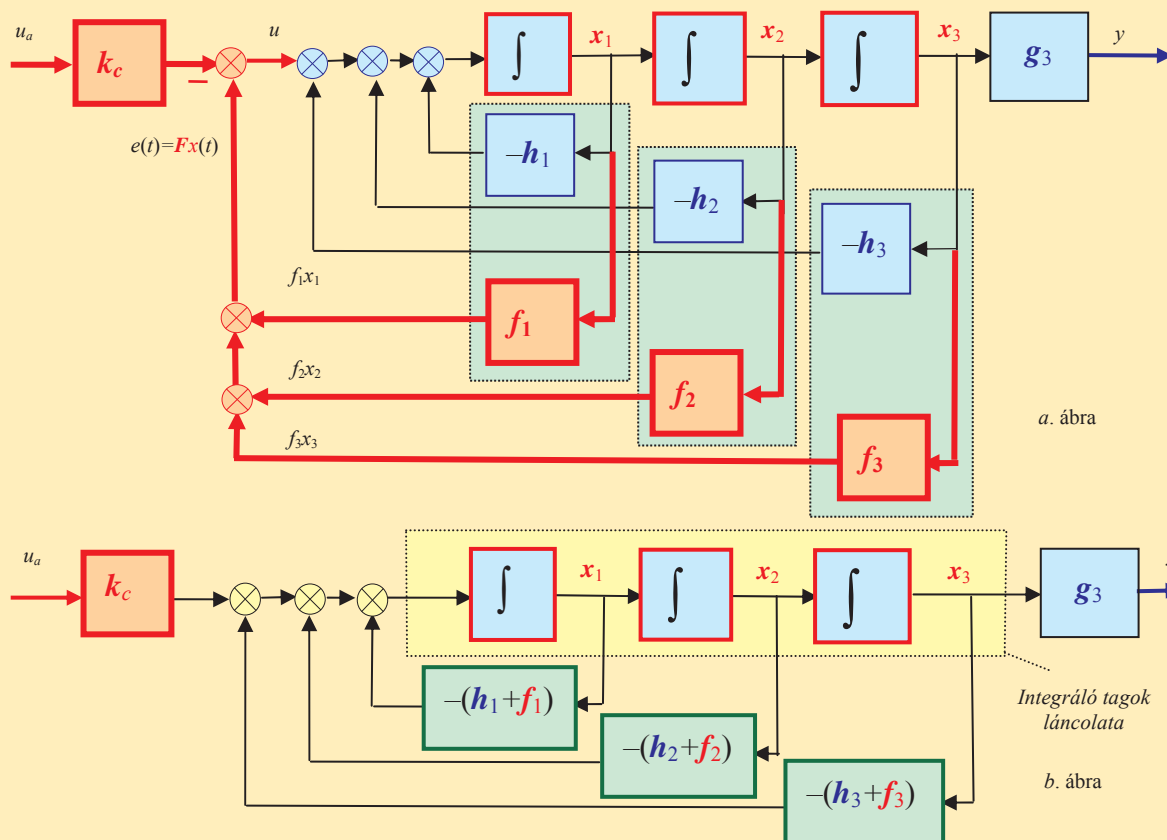
¹ A program elkészítésekor felhasználtuk a MATLAB szimbolikus számításokra nyújtott lehetőségét. Figyeljük meg, hogy már ebben az egyszerű esetben is – a bonyolult mátrixműveletek miatt – igencsak tanácsos a számítógéppel támogatott eljárások alkalmazása.

```
disp(F); disp(kc); disp(ut);
h1=6; h2=11; h3=6; g3=6;
hR1=18; hR2=99; hR3=162;
disp(subs(F)); % F=[12 88 156]
disp(subs(kc)); % kc=27
disp(subs(ut)); % ut=27
```

$$\begin{aligned} F &= [-h_1 + h_{R1} \quad -h_2 + h_{R2} \quad -h_3 + h_{R3}] = [12 \quad 88 \quad 156] \\ k_c &= \frac{h_{R3}}{h_3} = 27 \\ u_t &= \frac{1}{1 - \frac{-h_3 + h_{R3}}{h_3}} = \frac{h_{R3}}{h_3} = 27. \end{aligned}$$

A program futásának eredményei:
Az $F=[f_1 \ f_2 \ f_3]$ sorvektor komponenseinek kiszámítására – miután mind a folyamat, mind pedig a visszacsatolt rendszer állapot-egyenletei az irányíthatósági kanonikus alakban állnak rendelkezésre (lásd 1. ábra) – a viszonylag komplikált Ackermann-formula helyett a karakterisztikus polinomok együtthatóinak azonossági feltétele alapján is dolgozhatunk. Ennek megfelelően:

$$\begin{aligned} \det[\lambda I - A] &= H_p(\lambda) = \\ &= (\lambda - p_1)(\lambda - p_2)(\lambda - p_3) = \\ &= \lambda^3 + h_1\lambda^2 + h_2\lambda + h_3 = \\ &= (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 \\ \det[\lambda I - (A - BF)] &= H_R(\lambda) = \\ &= (\lambda - p_{R1})(\lambda - p_{R2})(\lambda - p_{R3}) = \\ &= \lambda^3 + h_{R1}\lambda^2 + h_{R2}\lambda + h_{R3} = \\ &= (\lambda + 3)(\lambda + 6)(\lambda + 9) = \lambda^3 + 18\lambda^2 + 99\lambda + 162 \\ \lambda^3 + h_{R1}\lambda^2 + h_{R2}\lambda + h_{R3} &= \lambda^3 + (h_1 + f_1)\lambda^2 + (h_2 + f_2)\lambda + (h_3 + f_3) = \\ &= \lambda^3 + (6 + f_1)\lambda^2 + (11 + f_2)\lambda + (6 + f_3) \\ h_{R1} = h_1 + f_1 &\rightarrow f_1 = h_{R1} - h_1 \rightarrow f_1 = 18 - 6 = 12 \\ h_{R2} = h_2 + f_2 &\rightarrow f_2 = h_{R2} - h_2 \rightarrow f_2 = 99 - 11 = 88 \\ h_{R3} = h_3 + f_3 &\rightarrow f_3 = h_{R3} - h_3 \rightarrow f_3 = 162 - 6 = 156 \end{aligned}$$



a. ábra

Integráló tagok láncolata

b. ábra

1. ábra Harmadrendű rendszer (az irányíthatósági kanonikus alaknak megfelelő) állapotviszacsatolásának lineáris alaptagokból felépített hatásvázlata

Az irányítási algoritmus mindezek alapján:

$$u(t) = k_c u_a(t) - f_1 x_1(t) - f_2 x_2(t) - f_3 x_3(t) = 27u_a(t) - 12x_1(t) - 88x_2(t) - 156x_3(t).$$

Ismételten szögezzük le, hogy az u_i túlvezérlési arányt a **pólus-áthelyezési arányok szorzatai** szabják meg.

Állapotirányítás tervezése állapotmegfigyelővel

Az állapotmegfigyelő (röviden: megfigyelő, *observer*) alkalmazására akkor kerül sor, ha a folyamat $x_i(t)$ állapotváltozói mérés-technikai eszközökkel *nem hozzáférhetőek*, közvetlen érzékelésük technikai okok miatt nem lehetséges². Ekkor a folyamat $u(t)$ bemenő- és $y(t)$ kimenőjeleinek mérési eredményeiből (ezek feldolgozása alapján) állítjuk elő az $x_i(t)$ állapotváltozó $x_i^*(t)$ becslt értékét és erről létesítjük a visszacsatolást. Az állapotváltozók rekonstrukciós eljárása az állapotbecslés (*estimation*), eszköze az állapotmegfigyelő. Az irányítás struktúráját és ennek részletezett változatát a 2. és 3. ábrák mutatják.

A megfigyelőt tartalmazó hatásvázlat azt szemlélteti, hogy a megfigyelő az $u(t)$ és $y(t)$ bemenőjeleinek feldolgozásával állítja elő a becslt $x^*(t)$ állapotvektort. A lényeges kérdés: milyen legyen a megfigyelő struktúrájának és paramétereinek kialakítása annak tükrében, hogy az $x^*(t)$ becslt állapotváltozó minél jobban közelítse a folyamat $x(t)$ állapotváltozóját?

Az állapotmegfigyelő

A megfigyelő – mint ahogy ez a 3. ábra hatásvázlatából is látható – lényegét tekintve a folyamatnak egyfajta állapotteres modellje. A folyamattal mintegy párhuzamosan „együtfutó” modell ideális, ha a megfigyelő A_m , B_m , C_m paramétermatrixai azonosak a folyamat A , B , C paramétermatrixaival. (További vizsgálataink során feltételezzük, hogy a megfigyelő a paramétermatrixok szempontjából ideális, azaz $A_m = A$, $B_m = B$, $C_m = C$). A folyamat és a folyamat modellje (a megfigyelő) azonos $u(t)$ bemenőjellel rendelkezik – valamint ha a paramétermatrixok mellett a folyamat $x(0)$ és a modell $x^*(0)$ kezdeti feltételei is azonosak –, ezért $x(t) = x^*(t)$, $y(t) = y^*(t)$. Ekkor $y^*(t) - y(t) = 0$ és a megfigyelő M visszacsatoló mátrixának (oszlopvektorának) nincs is szerepe, mivel *bemenőjele ekkor zérus*. Az M visszacsatolás addig jut szerephez, amíg a folyamat $y(t)$ és a megfigyelő $y^*(t)$ jelei között eltérés van, vagyis ha $h_i(t) = y^*(t) - y(t) \neq 0$. Az M méretezése is egy olyan követelmény alapján történik, hogy ez az eltérés a lehetőségek szerint minél hamarabb megszűnjön. *A megfigyelőt tehát úgy kell kialakítani, hogy ennek $x^*(t)$ állapotvektora „mérés technikailag” hozzáférhető (érzékelhető) vagy kiszámítható legyen.* Ez az $x^*(t)$ állapotvektor helyettesíti a megfigyelővel kialakított állapotviszacsatolásban a folyamat „nem mérhető” $x(t)$ állapotvektorát³. A folyamat és a megfigyelő állapotegyenletei a 3. ábra hatásvázlata alapján $A_m = A$, $B_m = B$, $C_m = C$, valamint $x(0) \neq x^*(0)$ feltételezésével:

² A megfigyelő alkalmazásával történő állapotirányítást az is indokolhatja, hogy a folyamat állapotváltozóinak érzékeléséből származó költségeket csökkentünk.

³ A megfigyelőt egy valós idejű (*real time*) számítógépes program futása is „realizálhatja”.

rixa $A_M = A - MC$, állapotvektora pedig $x(t) - x^*(t)$ különbségi vektor. A homogén differenciálegyenlet rendszer $x(t) - x^*(t)$ megoldása:

$$x(t) - x^*(t) = e^{(A-MC)t} (x(0) - x^*(0)).$$

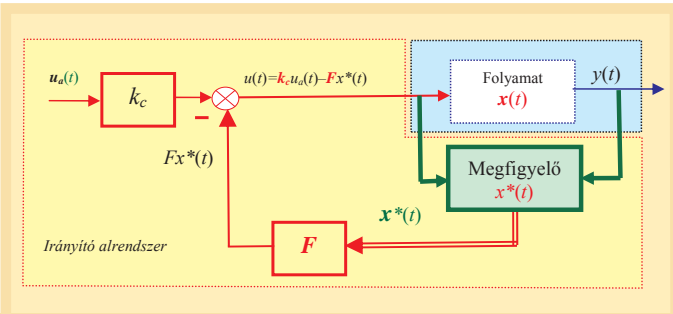
Az ennek megfelelő idődiagram a 4. ábrán található. Itt jegyezzük meg azt a 3. ábrán olvasható tulajdonságot is, hogy abban az esetben, ha a tényleges és a becsült állapotváltozó $x(t) - x^*(t)$ eltérése rövid idő alatt eltűnik, akkor a $h_y(t) = y^*(t) - y(t) = C[x^*(t) - x(t)]$ hiba is rövid idő után közel zérusra csökken.

A megfigyelő akkor felel meg a vele szemben támasztott elvárásoknak, ha $x^*(t)$ állapotvektora a folyamat $x(t)$ állapotvektorával mintegy „együtt fut”. Az együttmozgás hibája – a folyamat és a folyamatmodell esetlegesen eltérő paramétermátrixain túlmenően – abból származhat, hogy a folyamat $x(0)$ és a megfigyelő $x^*(0)$ kezdeti feltételeinek azonossága nem garantálható⁴. A sajátmozgás közötti $x(t) - x^*(t)$ eltérés azonban az $A_M = A - MC$ mátrix $\lambda_{M_i} = p_{M_i}$ sajátértékeivel – ezen belül a megfigyelő M visszacsatolásával – befolyásolható. A megfigyelő $A_M = A - MC$ állapotmátrixának karakterisztikus egyenlete:

$$\det[\lambda I - (A - MC)] = H_M(\lambda) = \lambda^n + h_{M1}\lambda^{n-1} + \dots + h_{M(n-1)}\lambda + h_{Mn} = (\lambda - p_{M1})(\lambda - p_{M2}) \dots (\lambda - p_{Mn}) = 0.$$

Matematikai tétel szerint a $\det[\lambda I - (A - MC)]$ karakterisztikus polinom p_{M_i} gyökei azonosak a $\det[\lambda I - (A^T - C^T M^T)]$ polinom gyökeivel, és ez utóbbi formulára (mert az M^T balról van szorozva C^T -vel)

⁴ A folyamat $x(t)$ és a megfigyelő $x^*(t)$ állapotvektorainak eltérése nem csupán a kezdeti feltételek $x(0) \neq x^*(0)$ különbözőségéből származhat, hanem abból is, hogy a folyamatot zavaró jelek hatása is érheti, ill. az $y(t)$ érzékelésekor mérési zajok is keletkezhetnek. Ennek tárgyalásával itt nem foglalkozunk.



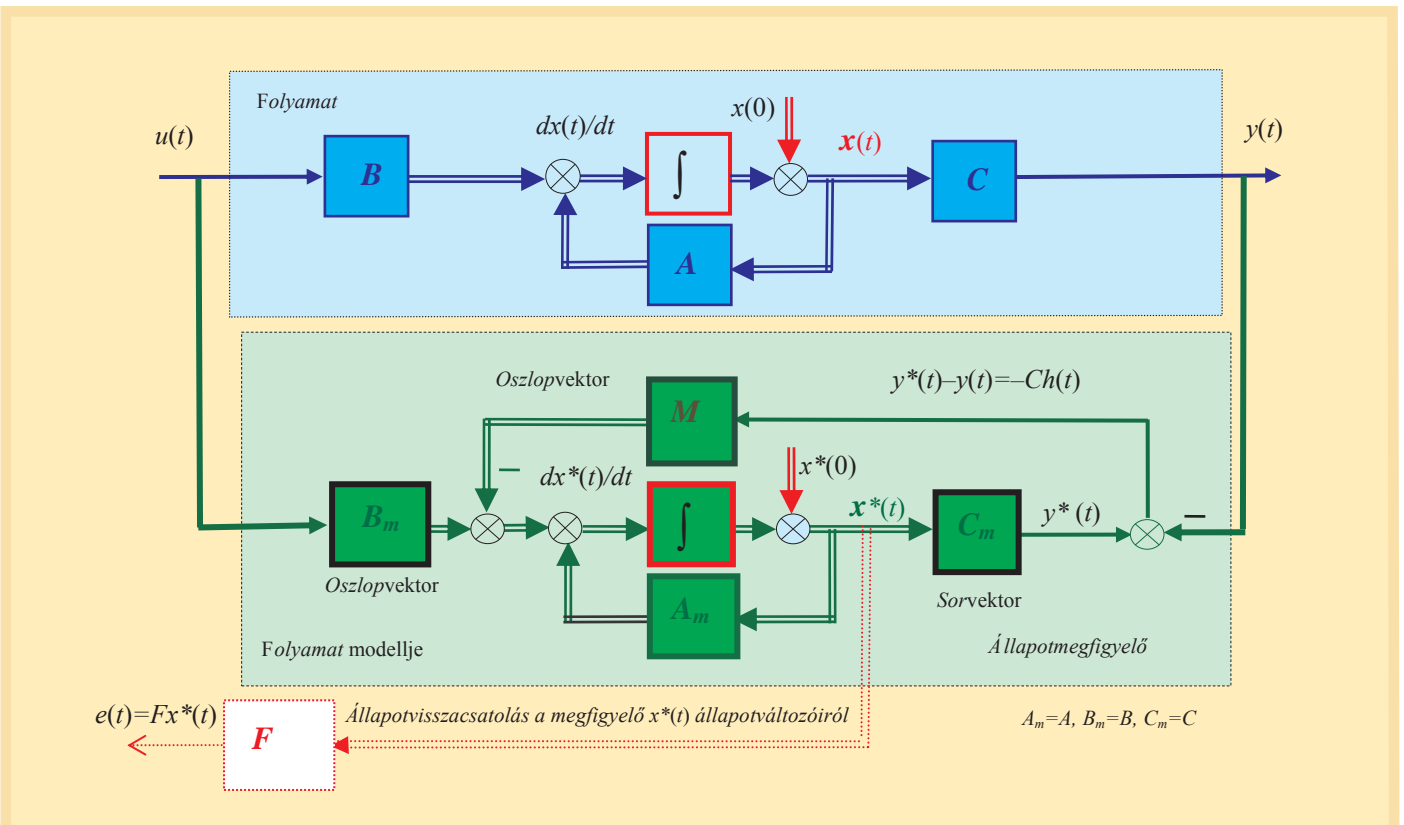
2. ábra Állapotvisszacsatolás létrehozása megfigyelővel

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ \frac{dx^*(t)}{dt} &= Ax^*(t) + Bu(t) - M(y^*(t) - y(t)) = \\ &= Ax^*(t) + Bu(t) - M(Cx^*(t) - Cx(t)) \\ y^*(t) &= Cx^*(t). \end{aligned}$$

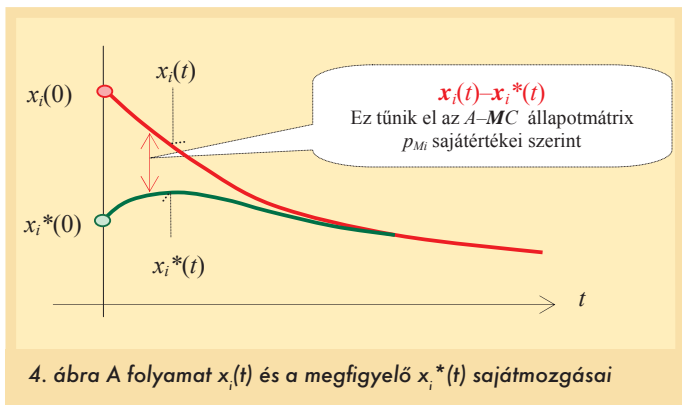
Ezekből a differenciálegyenletek különbségének képzése alapján kapjuk:

$$\frac{d}{dt}[x(t) - x^*(t)] = (A - MC)[x(t) - x^*(t)].$$

Ez egy n számú, elsőrendű, homogén (az $u(t)$ gerjesztést nem tartalmazó!) differenciálegyenlet rendszer, amelynek állapotmát-



3. ábra Az állapotmegfigyelő kialakításának elve



4. ábra A folyamat $x_i(t)$ és a megfigyelő $x_i^*(t)$ sajátmozgásai

A megfigyelő p_{Mi} pólusait (ill. az $A-MC$ mátrix $H_M(\lambda)$ karakterisztikus polinomjának h_{Mi} együtthatóit) úgy célszerű megválasztani, hogy ezek a felgyorsított rendszer p_{Ri} pólusainál is gyorsabb tranzienseket eredményezzenek, de legalábbis a domináns p_{Ri} pólusok valós részétől a domináns p_{Mi} pólusok valós részei kisebbek legyenek.

Állapotirányítás megfigyelővel

A megfigyelővel történő állapotirányítás során (ha a folyamat $x(t)$ állapotváltozó fizikailag nem hozzáférhető jelek) *nem* a folyamat $x(t)$ állapotvektoráról, hanem a folyamattal mintegy együtt futó és az azt modellező állapotmegfigyelő $x^*(t)$ állapotvektoráról hozzuk létre az $Fx^*(t)$ állapotvisszacsatolást. A kialakított struktúra alaptagokból kialakított hatásvázlatát az 5. ábra szemlélteti. A megfigyelővel állapotirányított eredő rendszer állapotegyenletei a hatásvázlat alapján:

az Ackermann-képlet vagy a MATLAB **acker**-függvénye már felhasználható:

$$M^T = [0 \dots 1] [C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T]^{-1} [(A^T)^n + h_{M1}(A^T)^{n-1} + \dots + h_{Mn} I].$$

Ebben A^T , C^T a folyamat adott A , C paramétermátrixainak transzponáltjai, h_{Mi} pedig a megfigyelő karakterisztikus polinomjának együtthatói. Ez utóbbiakat a megfigyelő p_{Mi} pólusainak méretezési követelményként előírt felvételei határozzák meg. A megfigyelő méretezése lényegében tehát az M visszacsatolás oszlopvektorának megválasztására redukálódik.

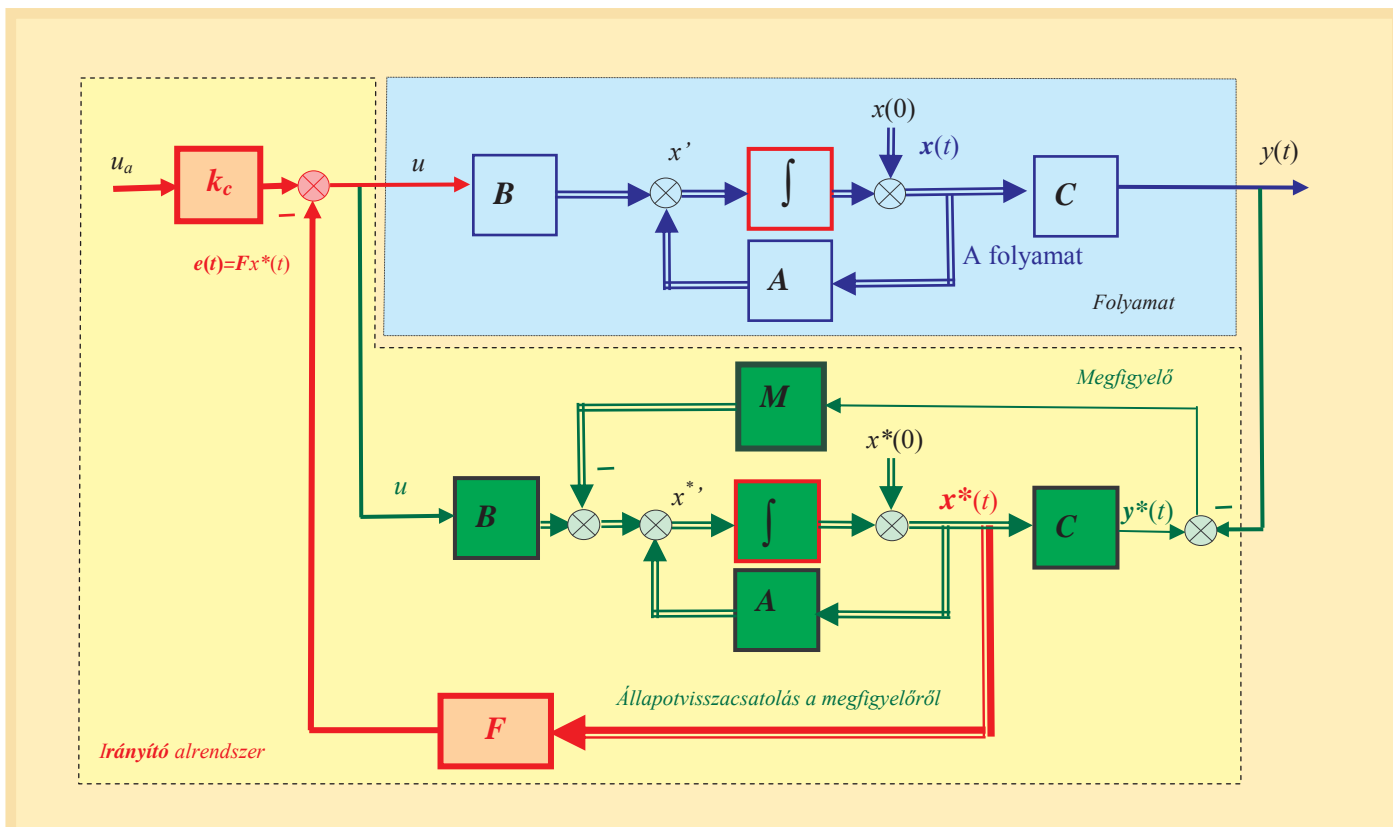
MATLAB-támogatással F , k_c és M méretezése:

```
input ('A='); input ('B='); input ('C=');
input ('pR='); input ('pM=');
F=acker(A,B,pR); disp(F);
kc=inv(C*inv(A-B*F)*B)*C*inv(A)*B;
disp(kc);
MT=acker(A',C',pM); M=MT'; disp(M);
```

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + B(k_c u_a(t) - Fx^*(t)) \\ \frac{dx^*(t)}{dt} &= Ax^*(t) - M(Cx^*(t) - Cx(t)) + B(k_c u_a(t) - Fx^*(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \\ u(t) &= -Fx^*(t) + k_c u_a(t) \\ h(t) &= x(t) - x^*(t). \end{aligned}$$

A folyamat és a megfigyelő állapotváltozóit $x(t)$ és $x^*(t)$, és miután mindkét rendszer rendszáma n , az eredő rendszert tekintve $2n$ számú állapotváltozóról van szó. Kimenőjeleknek elsődlegesen és természetesen a folyamat $y(t)$ kimenő- és $u(t)$ bemenőjeleit vesszük fel, de annak nyomon követésére, hogy a folyamat és a megfigyelő állapotváltozóit között mekkora az eltérés, a rendszer kimenőjeként kezeljük a $h(t)=x(t)-x^*(t)$ hibavektort is.

szbela12@gmail.com, fjuhaszne@gmail.com



5. ábra Állapotirányítás megfigyelővel kialakított struktúrája