# Szabályozástechnika 29.

## A szabályozás rendszertechnikai méretezése – 8.

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencné

**A klasszikus, $W_c(s)$ átviteli függvényű PID-szabályozó két stabilis zérusával a $W_p(s)$ átviteli függvényű folyamat két stabilis pólusát kompenzálja (egyszerűsítéssel kiejti) és a integráló fokozatának révén a nyitott kör típusszámát is alakítja. Elvi lehetőség van azonban arra is, hogy $W_c(s)$ megfelelő megválasztásával a folyamat minden stabilis pólusát és zérusát kompenzáljuk, miközben a zárt rendszer $N_R(s)=0$ karakterisztikus egyenletének gyökeire előírásokat fogalmazunk meg. A tervezési eljárás polinomiális módszere egy ún. diophantosi polinom–egyenlet megoldásához vezet. Az alkalmazást *Dr.Tuschák Róbert* munkáinak felhasználásával mutatjuk be.**

### Folytatás

Ha az $i \geq 2$ típusszámú nyitott kör frekvenciafüggvénye például $W_0(j\omega)=k/(j\omega)^i$ (vagyis $i \geq 2$ számú, egymással sorba kapcsolt integráló tag alkotja a nyitott kört), akkor a zárt rendszer a stabilitás határhelyzetében van, ha $i=2$, vagy labilis, ha $i>2$. Ennek oka az, hogy nyitott kör frekvenciafüggvényének fázisszöge minden körfrekvencián $arcW_0(j\omega) \leq -\pi$, vagyis a fázistöbblet $\varphi_t(\omega_c) \leq 0$. Ezen segít a $k_c[(1+sT_d)/(1+sT)]^{i-1}$ átviteli függvényű soros kompenzáció beiktatása, ami alkalmasan megválasztott $k_c$ átviteli tényezővel, $T_d>T>0$ differenciálási idővel és $T$ időállandóval a rendszert stabilizálni képes (1. ábra).

A fázismenet szélsőértéke az $\omega_c^*=1/\sqrt{(T_d T)}$ helyen van. A stabilitás biztosításához szükséges, hogy $\varphi_0(\omega_c)>-\pi$ legyen. Ha ugyanis ez fennáll, és a vágási körfrekvenciának ezt az $\omega_c^*=\omega_c$ értéket választjuk, akkor a $\varphi_t(\omega_c)>0$. Legyen $T_d/T=\alpha>0$ és $i \geq 2$. Az $\omega_c=1/\sqrt{(T_d T)}=1/(T\sqrt{\alpha})$ vágási körfrekvencián stabilis a zárt szabályozási rendszer, ha a $\alpha$ viszonyszámot úgy választjuk, hogy:

$$\varphi_0(\omega_c)=\left(-i\frac{\pi}{2}+(i-1)arctg\frac{\omega_c(T_d-T)}{1+\omega_c^2 T_d T}\right)_{\omega_c=1/\sqrt{T_d T}}>-\pi$$

$$(i-1)arctg\frac{\frac{T_d-T}{2}}{\sqrt{T_d T}}>(i-2)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad arctg\frac{\frac{T_d-T}{2}}{\sqrt{T_d T}}>(\frac{i-2}{i-1})\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\alpha-1}{2\sqrt{\alpha}}>tg\left((\frac{i-2}{i-1})\frac{\pi}{2}\right)$$

Ebből $i=2$ esetében $\alpha>1$, $i=3$ esetében $\alpha>5{,}8284$, $i=4$ esetében $\alpha>13{,}9282$ stb. értékeket kaphatunk. Fontos észrevennünk, hogy az $\alpha=T_d/T$ viszonyszámra kapott feltételek betartásakor $i=2$ esetben a rendszer strukturálisan stabilis. Az $i \geq 3$ esetben a stabilitás – a körerősítésnek egy $\alpha$-tól függő véges intervallumában – csupán feltételesen biztosítható.

*Bode* tételéből az is következik, hogy abban az esetben, ha az $\omega_c$ vágási körfrekvencia környezetében a nyitott kör frekvenciafüggvényének $a_0(\omega)_{dB}$ amplitúdómenete –40 dB/dekád meredekségű, akkor $\varphi_0(\omega_c)<-\pi/2$, tehát a zárt rendszer stabilis vagy labilis, attól függően, hogy a következő, –60 dB/dekád meredekségű töréspontól az $\omega_c$ vágási körfrekvencia milyen távol van. Ez az állapot már nem kívánatos helyzet, mert ha a rendszer esetlegesen még stabilis is, fázistöbblete valószínűsíthetően igen kicsi. Az $\omega_c$ vágási körfrekvencia helyén a amplitúdómenet –60 dB/dekád meredeksége nem megengedett, mivel ilyen esetben $\varphi_0(\omega_c)<-\pi$, ami a zárt rendszer bizonyosan labilis állapotát jelenti.

### Tervezés a zárt rendszer előírt pólusai alapján

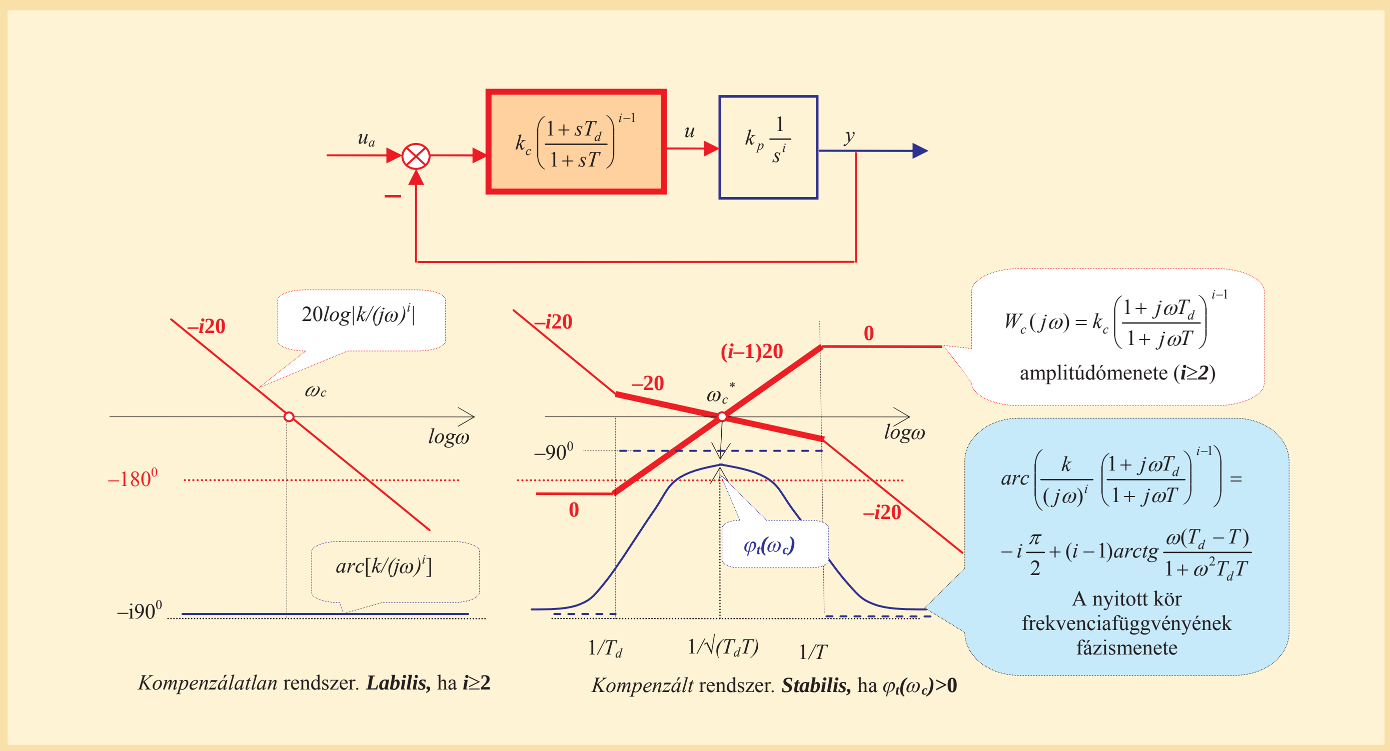
Általános esetben a folyamatnak több „labilis pólusa" és „labilis zérusa" is lehet. Legyen $W_p(s)=M_p(s)/N_p(s)$ olyan algebrai tört, amelynek számlálóját, ill. nevezőjét $M_p(s)=\mathbf{R(s)}M_{pk}(s)$, ill. $N_p(s)=\mathbf{L(s)}N_{pk}(s)$ alakban írjuk fel. Ezekben $\mathbf{R(s)}$ és $\mathbf{L(s)}$ a nem kompenzálható (az $s$ sík labilis félsíkján elhelyezkedő) „labilis zérusokat" ($R$) és „labilis pólusokat" ($L$) tartalmazó részpolinomok. Ezért az $M_{pk}(s)$ és az $N_{pk}(s)$ olyan, egységnyi vezető-együtthatókkal rendelkező polinomok, amelyeknek gyökei negatív valósrésszel rendelkeznek, tehát a *soros kompenzációt megvalósító szabályozóval kompenzálhatók*[1]. A folyamat $k_p$ átviteli tényezője az $R(s)$ vezető együtthatójában van figyelembe véve. A rendszer hatásvázlata a 2. ábrán látható.

Az adott folyamathoz illesztett soros kompenzációs szabályozó átviteli függvénye legyen:

$$W_c(s)=\frac{P(s)}{A(s)H(s)}\frac{N_{pk}(s)}{M_{pk}(s)}$$

A szabályozót leíró átviteli függvény számlálójának $N_{pk}(s)$ tényezőjével kompenzáljuk (kiejtjük) a folyamat kompenzálható (stabilis) pólusait, nevezőjének $M_{pk}(s)$ tényezőjével pedig közömbösítjük a folyamat kompenzálható (stabilis) zérusait. A szabályozó nevezőjében szereplő $A(s)$ polinom az $u_a$ alapjel azon pólusait tartalmazza, amelyeket azért célszerű a nyitott kör átviteli függvényébe sorosan beiktatni, hogy az adott alapjelre vonatkozó statikus hiba zérus legyen. Feltételezzük, hogy $A(s)$ minimális fokszáma $a=1$. Gyakran $A(s)=s^i$-alakú, ahol $i$ jelenti a nyitott kör átviteli függvényének típusszámát, ha egyébként a folyamat $W_p(s)$ átviteli függvényének nincs pólusa a komplex számsík origójában. **A $P(s)$ és $H(s)$ egyelőre ismeretlen $p$-, ill. $h$-fokszámú polinomok, ezek meghatározása jelenti a sza-**

1 Ha a folyamat $N_{pk}(s)$ stabilis pólusokat tartalmazó polinomját kompenzáljuk a szabályozó számlálójában is szereplő $N_{pk}(s)$ polinommal, akkor az ebben levő zérusok nem tökéletes egyezése a folyamat pólusaival nem okozhat stabilizálási problémát, mivel ezek mindegyike a komplex sík stabilis félsíkján helyezkedik el. Ugyanez a megállapítás igaz a folyamat „stabilis zérusait" tartalmazó $M_{pk}(s)$ polinomjára is.




*1. ábra Az $i \geq 2$ típusú szabályozás stabilizálása $(i-1)$ számú PD-tag soros kapcsolásával*

**bályozó méretezését**. A szabályozó $k_c$ átviteli tényezőjét a ***P(s)*** vezető együtthatójában vesszük figyelembe. Az egyelőre ismeretlen ***P(s)*** és ***H(s)*** polinomok kifejezései:

$$P(s)=p_0s^p+p_1s^{p-1}+\ldots+p_{p-1}s+p_p$$
$$H(s)=s^h+h_1s^{h-1}+\ldots+h_{h-1}s+h_h$$

A folyamat, a szabályozó és a nyitott kör átviteli függvényei a hatásvázlat jelöléseivel:

$$W_p(s)=\frac{M_p(s)}{N_p(s)}=\frac{R(s)}{L(s)}\frac{M_{pk}(s)}{N_{pk}(s)}$$
$$W_c(s)=\frac{M_c(s)}{N_c(s)}=\frac{P(s)}{A(s)H(s)}\frac{N_{pk}(s)}{M_{pk}(s)}$$
$$W_0(s)=W_c(s)W_p(s)=\frac{M_p(s)}{N_p(s)}\frac{M_c(s)}{N_c(s)}=$$
$$=\frac{P(s)}{A(s)H(s)}\frac{N_{pk}(s)}{M_{pk}(s)}\frac{R(s)}{L(s)}\frac{M_{pk(s)}}{N_{pk}(s)}=\frac{P(s)R(s)}{A(s)H(s)L(s)}$$

Ebben ***R(s)*** és ***L(s)*** a folyamat átviteli függvényében szereplő polinomkomponensek, ***A(s)*** a tervező által előzetesen felvett polinom, ***P(s)*** és ***H(s)*** a szabályozót definiáló és meghatározandó részpolinomok. A folyamat stabilis pólusainak és negatív valósrészű zérusainak „kiejtése" a paraméterek nem egzakt volta miatt elvileg nem lehet hibamentes. Ez azonban nem jelenthet problémát, mivel az ezeknek megfelelő gyökhelygörbeágak a komplex sík stabilis félsíkján maradnak. Jelöljük a polinomok fokszámait a nekik megfelelő kisbetűvel:

$W_p(s)$: $M_p(s) \to m_p=r+n_{pk}$ $N_p(s) \to n_p=l+n_{pk}$ $M_{pk}(s) \to m_{pk}$ $N_{pk}(s) \to n_{pk}$ $R(s) \to r$ $L(s) \to l$,
$W_c(s)$: $M_c(s) \to m_c=p+n_{pk}$ $N_c(s) \to n_c=a+h+m_{pk}$ ***A(s)→a*** ***P(s)→p*** ***H(s)→h,***
$W_0(s)$: $M_0(s) \to m_0=p+r$ $N_0(s) \to n_0=a+h+l$,
$W_R(s)$: $M_R(s) \to m_R$ $N_R(s) \to n_R$.

Legyen a szabályozó, a folyamat és a felnyitott kör az alábbi polinomokkal jellemezve (lásd 3. ábra).

A zárt rendszer eredő átviteli függvénye:

$$W_R(s)=\frac{W_0(s)}{1+W_0(s)}=\frac{\dfrac{P(s)R(s)}{A(s)H(s)L(s)}}{1+\dfrac{P(s)R(s)}{A(s)H(s)L(s)}}=$$
$$=\frac{P(s)R(s)}{A(s)H(s)L(s)+P(s)R(s)}=\frac{M_R(s)}{N_R(s)}$$

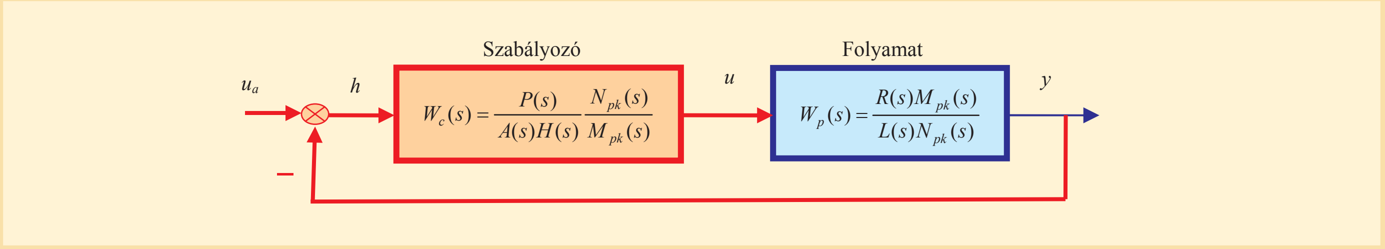
A méretezés célja, hogy ***R(s), L(s)*** ismeretében, ***A(s)*** előzetes felvételével meghatározzuk a szabályozó ***P(s)*** és ***H(s)*** polinomjainak $p$ és $h$ fokszámát és a polinomokban szereplő $p+1$, ill. $h$ ismeretlen együttható számértékeit[2]. **A méretezés alapelve, hogy előzetesen előírjuk az eredő rendszer $p_R$ pólusait (vagyis az $N_R(s)=0$ karakterisztikus egyenletének a gyökeit), amivel a zárt rendszer tranziens tulajdonságaira alapvető befolyást gyakorlunk.**

A zárt rendszer karakterisztikus egyenlete $W_R(s)$ nevezőjéből:

$$N_R(s)=A(s)H(s)L(s)+P(s)R(s)$$

Ebben a *diophantosi* polinomegyenletben ***$N_R(s)$*** és ***A(s)*** előzetesen felvett polinomok, ***L(s) és R(s)*** a folyamat átviteli függvényének nem kompenzálható részpolinomjai, vagyis ismert adatok. Az *A(s), R(s), L(s)* polinomok *a, r, l* fokszámai és együtthatói ismertek. Az ***$N_R(s)$, P(s), H(s)*** polinomok $n_R$, $p$ és $h$ fokszá-

2 A *H(s)* polinom vezető együtthatója $h_0=1$.



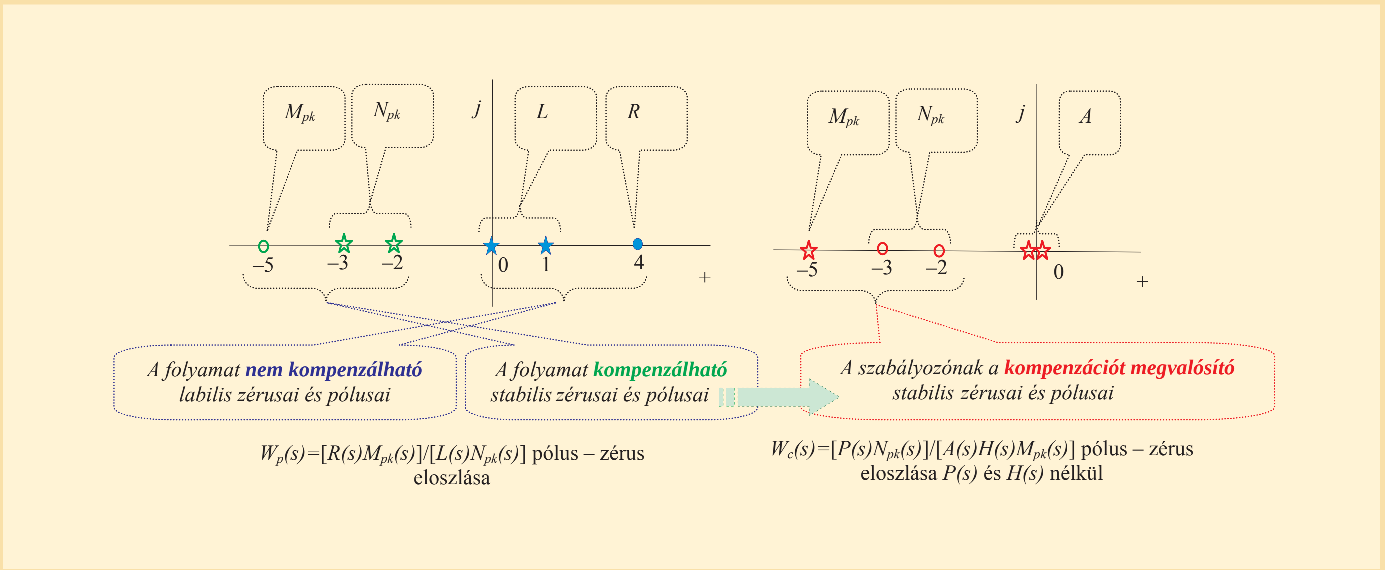

2. ábra Általános, soros kompenzációs szabályozási rendszer hatásvázlata

$$W_0(s)=\frac{\overbrace{M_c(s)\,M_p(s)}^{M_0(s)}}{\underbrace{N_c(s)\,N_p(s)}_{N_0(s)}}=\overbrace{\underbrace{\left(\frac{P(s)}{\underbrace{s^2}_{A(s)}H(s)}\,\frac{\overbrace{(s+2)(s+3)}^{N_{pk}(s)}}{\underbrace{(s+5)}_{M_{pk}(s)}}\right)}_{N_c(s)}}^{M_c(s)}\overbrace{\underbrace{\left(\frac{\overbrace{2(s-4)}^{R(s)}}{\underbrace{s(s-1)}_{L(s)}}\,\frac{\overbrace{(s+5)}^{M_{pk}(s)}}{\underbrace{(s+2)(s+3)}_{N_{pk}(s)}}\right)}_{N_p(s)}}^{M_p(s)}=\frac{P(s)}{A(s)H(s)}\frac{R(s)}{L(s)}=\frac{M_0(s)}{N_0(s)}$$

Fokszámok az adott példában:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **p=?** | $n_{pk}=2$ | $r=1$ | $m_{pk}=1$ | $m_c=p+n_{pk}$ | $n_c=a+h+m_{pk}$ |
| $a=2$ | **h=?** | $l=2$ | | $m_p=r+m_{pk}$ | $n_p=l+n_{pk}$ |
| | | | | $m_o=p+r$ | $n_0=a+h+l$ |

3. ábra $W_0(s)$ pólus – zérus eloszlása (példa)



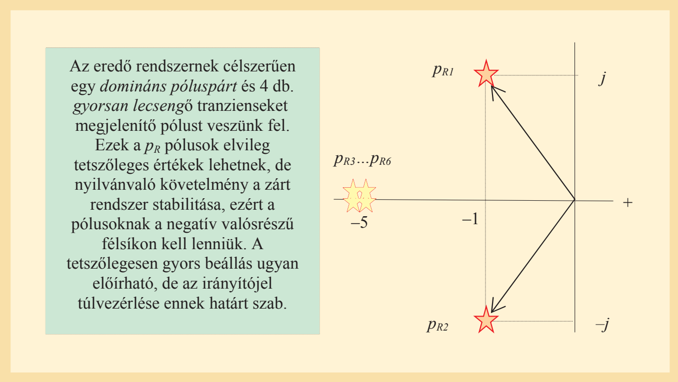

4. ábra A példában szereplő folyamat és a szabályozó pólus – zérus eloszlásai

maira különféle értékeket felvéve, az együtthatók azonosságára felépített polinomegyenletből felállítható egyenletrendszer alulhatározott, **határozott** és túlhatározott lehet. Határozott megoldás akkor kapható, ha a polinomegyenlet együttható-azonossági feltételeiből annyi egyenlet írható fel, mint amennyi az ismeretlenek száma. Ezt a tulajdonságot használjuk fel az $N_R(s)$, $P(s)$ és $H(s)$ polinomok $\boldsymbol{n_R}$, $\boldsymbol{p}$ és $\boldsymbol{h}$ fokszámainak meghatározására. Legyen tehát az $N_R(s)$ karakterisztikus egyenlet fokszáma $n_R$, vezető együtthatója az egység.

## A fokszámfeltételek meghatározása

A zárt rendszer karakterisztikus egyenletének jobb oldalán az $A(s)H(s)L(s)$ szorzat a $W_0(s)$ nevezője, a $P(s)R(s)$ szorzat pedig a számlálója. Ezért az $A(s)H(s)L(s)$ fokszáma $a+h+l$, ami elvileg nem lehet kisebb, mint a számláló $p+r$ fokszáma, mivel a szabályozó csak ekkor realizálható. Mindebből az $N_R(s)$ polinom $n_R$ fokszámára kapjuk:

$$n_R=a+h+l\,.$$




*5. ábra Az $N_R(s)$ karakterisztikus polinom előírt gyökeloszlása*

Az együtthatók között felírható egyenletek száma az $N_R(s)$ polinom együtthatóinak $n_R$ számával azonos, ugyanakkor az ismeretlenek száma pedig a $P(s)$ polinom $p+1$ számú, és a $H(s)$ polinom $h$ számú együttható darabszámainak az összege. Ezért:

$$n_R=p+1+h\,,$$
$$a+h+l=p+h+1\,.$$

Ebből: $\quad \boldsymbol{p=a+l-1}$ .

A szabályozó $W_c(s)$ átviteli függvényének $M_c$ számlálója és $N_c$ nevezője azonos fokszámmal rendelkezhet, amit a gyors beavatkozás érdekében célszerű ki is használni. Ennek figyelembevételével:

$$m_c=n_c\,,$$
$$p+n_p-l=a+h+m_p-r\,,$$
$$a+l-1+n_p-l=a+h+m_p-r\,.$$

Ebből: $\quad \boldsymbol{h=n_p-m_p+r-1}.$

Az $N_R(s)$ karakterisztikus polinom $n_R$ fokszámára betartandó feltétel tehát:

$$\boldsymbol{n_R}=a+h+l=\boldsymbol{n_p-m_p+r+a+l-1}\,.$$

Összefoglalva a betartandó fokszámfeltételeket, kapjuk:

| | | |
|---|---|---|
| Az $N_R(s)$ polinom fokszáma: | $\boldsymbol{n_R}$ | $\boldsymbol{= n_p-m_p+r+a+l-1}$ |
| A $P(s)$ polinom fokszáma: | $\boldsymbol{p}$ | $\boldsymbol{= a+l-1}$ |
| A $H(s)$ polinom fokszáma: | $\boldsymbol{h}$ | $\boldsymbol{= n_p-m_p+r-1}$ |

**Példa** (3. és 4. ábra)

$$W_p(s)=\frac{M_p(s)}{N_p(s)}=\left(\frac{2(s-4)}{s(s-1)}\right)\left(\frac{(s+5)}{(s+2)(s+3)}\right) \quad \Rightarrow R(s)=2(s-4) \quad L(s)=s(s-1)$$

$$W_c(s)=\frac{M_c(s)}{N_c(s)}=\left(\frac{P(s)}{s^2H(s)}\right)\left(\frac{(s+2)(s+3)}{(s+5)}\right) \quad \Rightarrow A(s)=s^2$$

$$W_0(s)=\frac{M_0(s)}{N_0(s)}=\frac{M_c(s)}{N_c(s)}\frac{M_p(s)}{N_p(s)}=\left(\frac{P(s)}{s^2H(s)}\frac{(s+2)(s+3)}{(s+5)}\right)\left(\frac{2(s-4)}{s(s-1)}\frac{(s+5)}{(s+2)(s+3)}\right)=$$
$$=\frac{P(s)2(s-4)}{s^2H(s)s(s-1)}=\frac{P(s)R(s)}{s^2H(s)L(s)}$$

**Megjegyzés**

Az $A(s)$ polinomot a tervezés folyamatában előzetesen fel kell venni. Az adott példában (a típusszám növelése céljából) $A(s)=s^2$ polinomot választottunk. Figyelembe kell venni azonban, hogy a nyitott kör $i$ típusszámát a *folyamat origóban lévő pólusa is* befolyásolja [$L(s)=\boldsymbol{s}(s-1)$], ezért jelen példában a nyitott kör átviteli függvényének típusszáma $i=3$.

A számpélda adataival: $m_p=2$, $n_p=4$, $r=1$, $l=2$, $a=2$. Ennek alapján a fokszámfeltételek:

$$\boldsymbol{n_R} = n_p-m_p+r+a+l-1 = 4-2+1+2+2-1 = \boldsymbol{6}\,,$$
$$\boldsymbol{p} = a+l-1 = 2+2-1 = \boldsymbol{3}\,,$$
$$\boldsymbol{h} = n_p-m_p+r-1 = 4-2+1-1 = \boldsymbol{2}\,.$$

A fokszámfeltételek szerint az $N_R(s)$ karakterisztikus egyenlet fokszáma $\boldsymbol{n_R=6}$, ezért a méretezési előírásban a zárt rendszernek 6 db pólusát kell előzetesen – méretezési követelményként – megadni. Legyenek az $N_R(s)$ pólusai az 5. ábrán láthatók.

A szabályozó felvett átviteli függvényének kifejezéséből az is következik, hogy számlálója tartalmazza a $p=3$ fokszámú $P(s)$ polinomot, a nevezője pedig a $h=2$ fokszámú $H(s)$ polinomot, vagyis az adott példában:

$$P(s)=p_0s^3+p_1s^2+p_2s+p_3\,,$$
$$H(s)=s^2+h_1s+h_2\,.$$

A zárt rendszer karakterisztikus egyenlete tehát:

$$\boldsymbol{N_R(s)}=A(s)\boldsymbol{H(s)}L(s)+\boldsymbol{P(s)}R(s)=\boldsymbol{0}\,,$$

$$s^6+n_{R1}s^5+n_{R2}s^4+n_{R3}s^3+n_{R4}s^2+n_{R5}s+n_{R6}=$$
$$=s^2(s^2+h_1s+h_2)s(s-1)+(p_0s^3+p_1s^2+p_2s+p_3)2(s-4)\,,$$
$$(s+1+j)(s+1-j)(s+5)^4=$$
$$=s^6+\boldsymbol{22}s^5+\boldsymbol{192}s^4+\boldsymbol{840}s^3+\boldsymbol{1925}s^2+\boldsymbol{2250}s+\boldsymbol{1250}=$$
$$=s^6+(h_1-1)s^5+(h_2-h_1+2p_0)s^4+(2p_1-8p_0-h_2)s^3+$$
$$+(2p_2-8p_1)s^2+(2p_3-8p_2)s-8p_3.$$

Az együtthatók azonosságának következményeként a hat ismeretlen együtthatót tartalmazó, hat egyenletből álló algebrai egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{h_1-1} &= \boldsymbol{n_{R1}} = \boldsymbol{22},\\
\boldsymbol{h_2-h_1+2p_0} &= \boldsymbol{n_{R2}} = \boldsymbol{192},\\
\boldsymbol{2p_1-8p_0-h_2} &= \boldsymbol{n_{R3}} = \boldsymbol{840},\\
\boldsymbol{2p_2-8p_1} &= \boldsymbol{n_{R4}} = \boldsymbol{1925},\\
\boldsymbol{2p_3-8p_2} &= \boldsymbol{n_{R5}} = \boldsymbol{2250},\\
\boldsymbol{-8p_3} &= \boldsymbol{n_{R6}} = \boldsymbol{1250}.
\end{aligned}$$

Ez az egyenletrendszer mátrix alakban is megadható:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{R1}+1 \\ n_{R2} \\ n_{R3} \\ n_{R4} \\ n_{R5} \\ n_{R6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 192 \\ 840 \\ 1925 \\ 2250 \\ 1250 \end{bmatrix}$$

Ez az egyenlet – miután az eredő rendszer előírt pólusai és így $N_R(p_2)$ karakterisztikus polinomjának $n_{Ri}$ együtthatói ismertek – a $H(s)$, $P(s)$ polinomok $h_1$, $h_2$, $p_0$, $p_1$, $p_2$, $p_3$ ismeretlen együtthatóira egy egyszerű mátrixművelettel megoldható.

*(Folytatjuk!)*

**szbela12@gmail.com, fjuhaszne@gmail.com**