Szabályozástechnika 23.

A szabályozás rendszertechnikai méretezése – 2.

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencné

A szabályozó méretezésével foglalkozó anyag 2. részében megadjuk a gyakorlati alkalmazásaikban használt szabályozók átviteli és átmeneti függvényeit, valamint *Bode*-diagramjaiknak aszimptotikus közelítéseit. Méretezési előírásnak tekintve a szabályozási rendszer túlvezérlési arányát és a felnyitott kör frekvencia függvényének fázistöbbletét, felvázoljuk az önbeálló holtidős folyamat PIPD-szabályozójának méretezési alapegyenletét.

Különféle szabályozók tulajdonságainak összefoglalása

A soros kompenzációs szabályozási rendszerben a $W_p(s)$ átviteli függvényű folyamatot a vele soros kapcsolást alkotó, $\boldsymbol{W_c(s)}$ átviteli függvényű szabályozó működteti. Az 1. és 2. táblázatban a gyakran alkalmazott szabályozók néhány rendszerjellemző függvényét foglaltuk össze. Ebben az átviteli függvények mellett megadjuk a szabályozó aszimptotikus *Bode*-diagramját[1] és *átmeneti* függvényét.

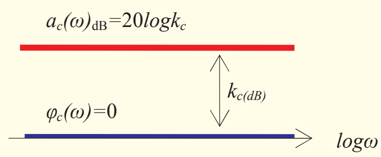
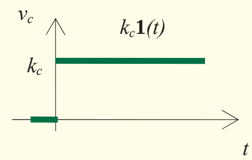
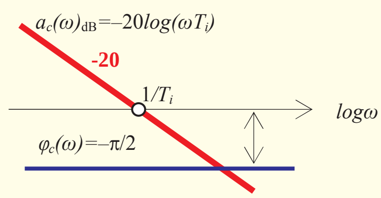
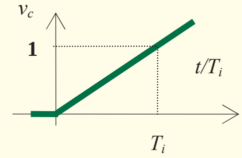
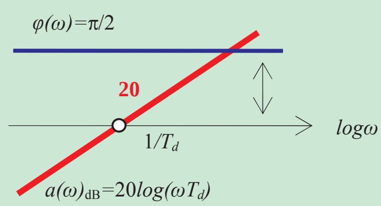
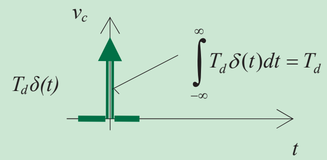
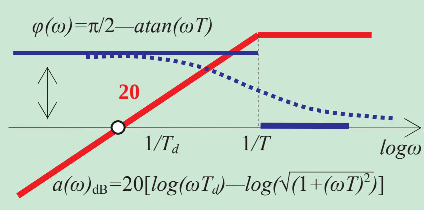
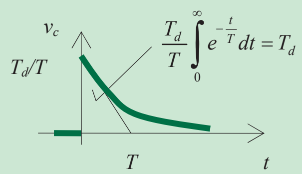
[1] *Bode*-diagram: a $W(j\omega)=a(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ frekvenciafüggvény $a(\omega)=abs\,W(j\omega)$ ***amplitúdómenetének*** és $\varphi(\omega)=arc\,W(j\omega)$ ***fázismenetének*** logaritmikus diagramokon történő ábrázolása: $a(\omega)_{dB}=20\log a(\omega)$, $\varphi(\omega)=arctg\{imag[W(j\omega)]/[real\,W(j\omega)]\}$.

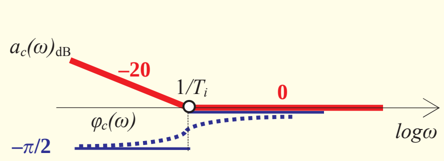
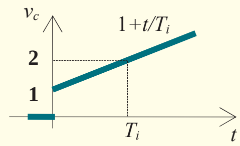
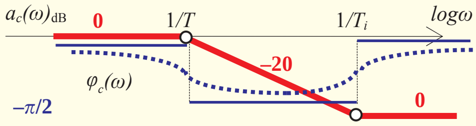
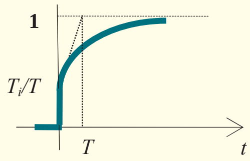
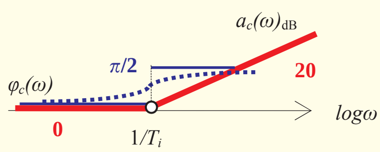
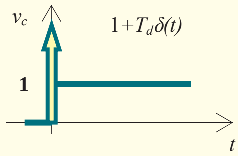
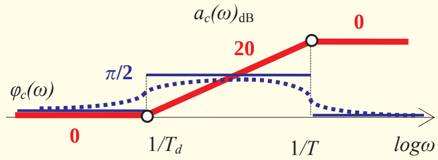
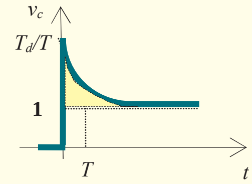
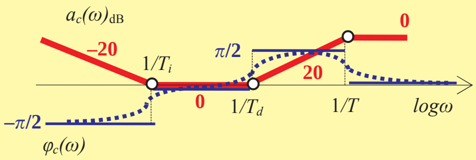
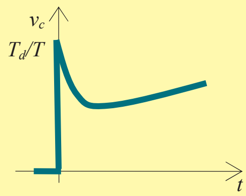
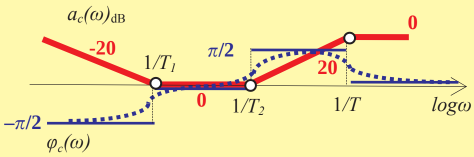
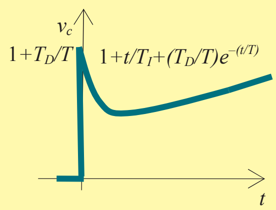
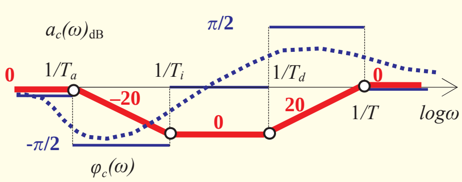
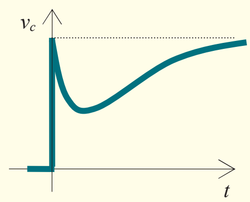
A **P**-szabályozó akkor alkalmazható, ha a folyamatnak egyetlen domináló időállandója van, és nagy körerősítés mellett is biztosítható a stabilitás, az alacsony állandósult hiba és a megfelelő fázistöbblet. Az **I**-szabályozó alkalmazására akkor kerülhet sor, ha a folyamat domináló időkésleltetése a $\boldsymbol{T_h}$ *holtidő*.

Megjegyzés

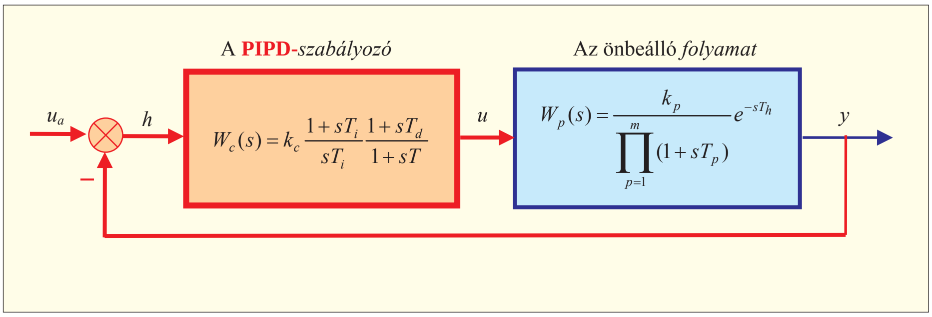
Az 1. táblázatban szerepelnek a **D**- (ideális differenciáló) és a **D**T- (egytárolós differenciáló) tagok is. Ezek azonban önmagukban szabályozóként nem használhatók. A $W_D(s)=sT_d$ átviteli függvényű, ideális **D**-taggal két probléma van. Egyrészt nem realizálható (lásd pl. az átmeneti függvényt), más-

1. táblázat Szabályozók rendszerjellemző függvényei

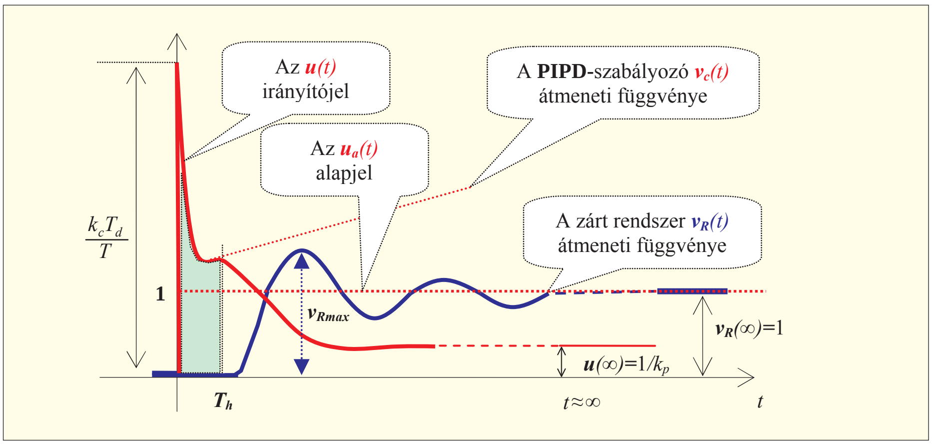
<table>
<tr><th>Típus</th><th>$W_c(s)$</th><th>Bode-diagram [a_{cdB}, φ_c]</th><th>Átmeneti függvény [$v_c(t)$]</th></tr>
<tr><td>P</td><td>k_c</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>I</td><td>$\frac{1}{sT_i}$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ideális D-tag
D
Nem realizálható! Önmagában szabályozó nem lehet!</td><td>sT_d</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Realizálható D-tag
DT
Realizálható! Önmagában szabályozó nem lehet!</td><td>$\frac{sT_d}{1+sT}$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Típus	$W_c(s)/k_c$	*Bode*-diagram [$a_{c\mathrm{dB}}$,φ_c]	*Átmeneti* függvény [$v_c(t)$]
PI	$\frac{1+sT_i}{sT_i}$		
PI$_k$ Közelítő PI-szabályozó $T>T_i$	$\frac{1+sT_i}{1+sT}$		
PD *Ideális D-csatorna miatt* Nem realizálható!	$1+sT_d$		
PDT $T_d>T$	$\frac{1+sT_d}{1+sT}$		
PIPD	$\frac{1+sT_i}{sT_i}\,\frac{1+sT_d}{1+sT}$		
PID	$1+\frac{1}{sT_I}+\frac{sT_D}{1+sT}$		
PIPD$_k$ Közelítő PIPD-szabályozó $T_a>T_i>T_d>T$	$\frac{(1+sT_i)(1+sT_d)}{(1+sT_a)(1+sT)}$		

2. táblázat Szabályozók rendszerjellemző függvényei (1. táblázat folytatása)



5. ábra **PIPD**-szabályozót tartalmazó, soros kompenzációs, szabályozási rendszer hatásvázlata



6. ábra A zárt szabályozási rendszer $u(t)$ és $v_R(t)$ jeleinek időfüggvényei $[u_a(t)=\mathbf{1}(t)]$

részt az állandó bemenőjelre állandósult állapotban zérus kimenőjelet állít elő. Az ideális **D**-tag *Bode*-diagramjának amplitúdómenetéből az is látszik, hogy a harmonikus bemenőjel ω körfrekvenciájának növelésével – azzal arányosan – növekszik a kimenőjel amplitúdója. Ez a fizikai rendszerek szükségszerűen jelenlévő tehetetlenségének ellentmond. Az egytárolós, $W_{DT}(s)=sT_d/(1+sT)$ átviteli függvényű **D**T-tag ($T>0$) ugyan realizálható, de az állandó bemenőjelre állandósult állapotban ez is zérus kimenőjelet szolgáltat. Mindezek miatt a realizálható **D**T-tagot is csak **P**- vagy **I**-taggal *párhuzamosan* kapcsolt struktúrában lehet (legalábbis a szabályozókban) felhasználni (lásd **PID**-szabályozó).

A PIPD-szabályozó rendszertechnikai méretezése előírt fázistöbbletre és túlvezérlési arányra

A szabályozó méretezését arra az esetre mutatjuk be, amikor a korábban feltételezett önbeálló, energiatárolós és holtidős késleltetésekkel rendelkező folyamatot **PIPD**-szabályozó működteti[2]. Feltételezzük, hogy a folyamat minden paramétere ($\boldsymbol{k_p}$, $\boldsymbol{T_1}$, $\boldsymbol{T_2}$, … $\boldsymbol{T_m}$, $\boldsymbol{T_h}$) ismert, és a szabályozó $\boldsymbol{k_c}$, $\boldsymbol{T_i}$, $\boldsymbol{T_d}$, $\boldsymbol{T}$ adatainak meghatározása a méretezési cél, miközben a zárt rendszer dinamikus viselkedésére előírásokat teszünk. A számítások alapjául szolgáló hatásvázlat az 5. ábrán látható.

A szabályozás minőségi követelményeit a zárt rendszer egységugrás alapjelre adott $u(t)$ és $y(t)=v_R(t)$ válaszai alapján fogalmazzuk meg. Ezeknek a válaszoknak az időbeli lefolyását a 6. ábrán láthatjuk. A teljes tranziens folyamat egy szakasza a $0<t<T_h$ időintervallum. Ebben az időszakaszban az $u(t)$ irányítójel a szabályozó $v_c(t)$ átmeneti függvényének megfelelően alakul. Ennek oka az, hogy a folyamat T_h holtideje miatt az $y(t)$ kimenőjel ebben az időintervallumban zérus, ami miatt a $h(t)$ hibajelre befolyása nincs, és ezért itt $h(t)=u_a(t)-0=u_a(t)=\mathbf{1}(t)$. Mindezek miatt[3] az $u(t)$ irányítójel értéke a $t=0$ időpillanatban $u(0)=v_c(0)=k_cT_d/T$.

A $t\geq T_h$ időpontokban a rendszerben a negatív visszacsatolás érvényre jut, $y(t)$ növekedni kezd, aminek hatására a $h(t)$ hibajel csökken. Az egyensúly beálltával a szabályozó az $u(t)$ kimenőjelét is egy alkalmas $u(\infty)$ értékre mintegy „visszaveszi”, és ennek eredményeként a szabályozott jellemző is $y(\infty)=v_R(\infty)=1$ értékére beáll (ne feledjük: a zárt rendszernek aszimptotikusan stabilisnak kell lennie, és $i=1$-típusú *integrálszabályozásról* van szó!).

A zárt rendszerben kialakuló teljes tranziens folyamat – miután a szabályozóban az *integráló csatorna* is jelen van – szükségszerűen olyan, hogy az egyensúlyi állapot elérésekor a hibajel $h(\infty)=0$, a szabályozott jellemző $y(\infty)=v_R(\infty)$ végértéke pedig azonos az alapjel $u_a(t)=\mathbf{1}(t)$ végértékével ($y(\infty)=u_a(\infty)=1$). Ez azt is jelenti, hogy az $u(t)$ irányítójel egyensúlyi végértéke szükségszerűen $u(\infty)=1/k_p$. Feltételezéseinknek megfelelően a folyamat időállandói $T_1>T_2>\ldots T_p>\ldots>T_m$, és a nyitott kör átviteli függvénye:

$$W_0(s)=W_c(s)W_p(s)=$$
$$=k_c\frac{1+sT_i}{sT_i}\frac{1+sT_d}{1+sT}\frac{k_p}{(1+sT_1)(1+sT_2)\prod_{p=3}^{m}(1+sT_p)}e^{-sT_h}$$

A $\boldsymbol{T_i=T_1}$, $\boldsymbol{T_d=T_2}$ póluskiejtés elvét követve az egyszerűsítések után ez az alak a

$$W_0(s)=\frac{k_ck_p}{sT_1(1+sT)\prod_{p=3}^{m}(1+sT_p)}e^{-sT_h}$$

kifejezésre egyszerűsödik, amiben most már ismeretlenként kizárólag a szabályozó átviteli függvényének $\boldsymbol{k_c}$ és $\boldsymbol{T}$ adata szerepel. A méretezés előírt feltételei az $u_t=u_{max}/u(\infty)$ **túlvezérlési arányra** és a $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvény $\varphi_t(\omega_c)$ **fázistöbbletére** vonatkoznak. Ez egyben azt is jelenti, hogy a nyitott kör frekvenciafüggvényének $\boldsymbol{\omega_c}$ vágási körfrekvenciája új ismeretlenként jelenik meg, meghatározása nem megkerülhető. A méretezés végső feltételrendszere tehát:

$$\begin{aligned} absW_0(j\omega_c) &= 1\\ \pi+arcW_0(j\omega_c) &= \varphi_t\\ \frac{u_{max}}{u(\infty)} &= u_t \end{aligned}$$

2 A méretezés elvi indoklásának részletezése a cikksorozat későbbi részében található.

3 Az irányítójel $t=0$ időpontban felvett értéke akkor is $u(0)=v_c(0)=k_cT_d/T$, ha a holtidő zérus, és a folyamatban kizárólag energiatároló okozta jelkésleltetések vannak (a folyamat kimenőjele a $t=0$ időpontban csak akkor tudna ugrásszerűen változni, ha a holtidőmentes átviteli függvényében a számláló és nevező azonos fokszámmal rendelkezne). A *Laplace*-transzformáció kezdetiérték-tételéből is következik, hogy

$$\underbrace{lim}_{t\to 0}v_c(t)=\underbrace{lim}_{s\to\infty}sv_c(s)=\underbrace{lim}_{s\to\infty}sk_c\frac{(1+sT_i)(1+sT_d)}{sT_i(1+sT)}\frac{1}{s}=k_c\frac{T_d}{T}$$

Az adott **PIPD**-szabályozóra és az önbeálló folyamatra (részletezve):

$$\frac{k_c k_p}{\omega_c T_1 \sqrt{[1+(\omega_c T)^2]\prod_{p=3}^{m}[1+(\omega_c T_p)^2]}} = 1$$

$$\pi - \left[\frac{\pi}{2} + arctg(\omega_c T) + \sum_{p=3}^{m} arctg(\omega_c T_p) + \omega_c T_h\right] = \varphi_t$$

$$k_c k_p \frac{T_2}{T} = u_t$$

Ez a három ismeretlen ($\boldsymbol{\omega_c}$, $\boldsymbol{k_c}$, $\boldsymbol{T}$) tartalmazó, három egyenletből álló, nemlineáris algebrai egyenletrendszer megoldása adja a szabályozó keresett $\boldsymbol{k_c}$ és $\boldsymbol{T}$ paramétereit, és ezen túlmenően szolgáltatja a nyitott kör $\boldsymbol{\omega_c}$ vágási körfrekvenciáját is. A második egyenletből a **PD**-fokozat T időállandója (mint ω_c függvénye), a harmadikból a k_c átviteli tényező (mint T függvénye) kifejezhető. Ezeket a zérusra rendezett első egyenletbe helyettesítve a *méretezés alapegyenletét* kapjuk:

$$T = \frac{tg\left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_t\right) - \sum_{p=3}^{m} arctg(\omega_c T_p) - \omega_c T_h\right]}{\omega_c}$$

$$k_c = \frac{T u_t}{k_p T_2}$$

$$\frac{u_t tg\left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_t\right) - \sum_{p=3}^{m} arctg(\omega_c T_p) - \omega_c T_h\right]}{\omega_c^2 T_1 T_2 \sqrt{\left\{1 + tg^2\left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_t\right) - \sum_{p=3}^{m} arctg(\omega_c T_p) - \omega_c T_h\right]\right\}\prod_{p=3}^{m}\left[1+(\omega_c T_p)^2\right]}} - 1 = 0$$

Ez utóbbi kifejezésben T_1, T_2,... T_m, T_h a folyamat paraméterei, az $\boldsymbol{u_t}$ és $\boldsymbol{\varphi_t}$ előírt méretezési követelmények, és az egyetlen ismeretlen az ω_c vágási körfrekvencia. Az $absW_0(j\omega_c)$–1=0 alakban felírt méretezési alapegyenlet viszonylag komplikált, nemlineáris algebrai kifejezés, amelynek az ω_c zérus helyét kell megkeresni. Ennek meghatározását követően a szabályozó $\boldsymbol{T}$ és $\boldsymbol{k_c}$ paraméterei egy egyszerű helyettesítéssel kiszámíthatók. A méretezést **MATLAB**-támogatással végezzük, a kidolgozott program fontos függvénye az **`fzero`**-eljárás[4].

Megjegyzés

A **`sorozat3-`**nevű program a folyamat maximálisan hat darab időállandóját (T_1>0, ... T_6>0) és holtidejét (T_h>0) képes kezelni. Az időállandók közül a $\boldsymbol{T_1 > T_2}$ az első két legnagyobb időállandó, a T_h holtidő értékének a jelkésleltetésben domináns szerepe nem lehet ($T_h<T_2/2$). A T_3,...T_6 időállandók és a T_h holtidő bármelyike zérus értéket is felvehet. A **MATLAB**-promt után a **`sorozat3`** begépelésével indítható a program futása. A program első megállásakor bekéri a folyamat paramétereit (k_p, T_1, ... T_6, T_h), a méretezési követelményeket (φ_t, u_t), majd meghatározza a **`meretezo.m-`**fájlba megírt kifejezés $\boldsymbol{\omega_c}$ zérus helyét. Ennek ismeretében kerülnek kiszámításra a szabályozó $\boldsymbol{T}$ és $\boldsymbol{k_c}$ paraméterei. A méretezési rész megadja a szabályozó átviteli függvényének **PID-** és **PIPD-**alakjait is. A program második része a méretezett szabályozó adatai mellett ellenőrzi a zárt rendszer különféle tulajdonságait. Az ellenőrzés során a folyamat holtidős tényezőjét ötödfokú *Pade*-polinommal közelíti.

A méretezés alapegyenletét megoldó **`sorozat3-`**nevű nevű MATLAB-program tételes megadását, valamint számpédán bemutatott felhasználásának eljárást a következő részben közöljük.

(Folytatjuk!)

szbela@iit.bme.hu, juhaszne@iit.bme.hu

[4] Ez egy **`function-`**fájlba megírt tetszőleges $f(\omega)$ függvény zérus helyét (az ω változó azon ω_c értékét, amely mellett $f(\omega_c)$=0) keresi meg, és a keresés megindításához meg kell adni az ω_{ci} kiindulási (becsült) értékét.