

Szabályozástechnika – 20.

Az elmélet egy alkalmazása

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencé

Folytatva a hajtásszabályozás átviteli függvényekre alapozott tárgyalását, közreadjuk a szabályozás egyes alrendszerait és a visszacsatolt eredő rendszert analizáló MATLAB programot (sorozat2.m fájl). Az átviteli függvényekre alapozott analízis teremt egyszerű lehetőséget arra, hogy a $W_c(s) = k_c(1+sT_i)/(sT_i)$ átviteli függvényű PI szabályozó k_c (átviteli tényező) és T_i (integrálási idő) paramétereinek meghatározására szisztematikus méretezési eljárást alkalmazzunk.

MATLAB-program az átviteli függvény-módszerre alapozott analízisre

A következő MATLAB-program – az átviteli függvényekre alapozva – szintén alkalmas a rendszer transziens tulajdonságainak vizsgálatára. A program bekéri a rendszer átviteli függvényeinek paramétereit ($k_p, k_z, T_m, T_v, \mu, A_E, k_c, T_i$ lásd input utasítások), és ezek ismeretében meghatározza a szabályozó, a folyamat, a nyitott és a zárt kör eredő átviteli függvényeit (`series; cloop; feedback`), valamint a szabályozó, a folyamat és a zárt rendszer átmeneti függvényeit (`step`). Kiszámítja a karakterisztikus polinom gyökeit (`roots`), definiálja és ábrázolja az $u_a(t) = 10(1 - e^{-t/20})\mathbf{1}(t)$ alapjel időfüggvényét, és kiszámítja az erre adott $y(t)$ választ (`step`).

```
echo on
%=====
% Fordulatszám-szabályozás analízise az
% átviteli függvények alapján
% (sorozat2.m fájl)
%=====
% Adatbevitel
kp=input('kp='); kz=input('kz=');
Tm=input('Tm='); Tv=input('Tv=');
kc=input('kc='); Ti=input('Ti=');
AE=input('AE='); mü=input('mü=');
%=====
% Analízis az átviteli függvények
% alapján
%=====
% A rendszer átviteli függvényeinek
% számítása
Gc=kc*[Ti 1]; Hc=[Ti 0]; Gp=kp;
Hp=[Tm*Tv Tm 1];           %Wc(s), Wp(s)
Gz=-kz*[Tv 1]; Hz=Hp;     %Wz(s)
grid on;
step(Gc, Hc);
title('A szabályozó vc(t) átmeneti...
függvénye'); pause;
step(Gp, Hp);
title('A folyamat vp(t) átmeneti...
függvénye'); pause;
step(Gz, Hz);
```

```
title('A folyamat zavarásra vonatkozó...
átmeneti függvénye'); pause;
% A nyitott és a zárt rendszer eredő
% átviteli függvénye
[G0, H0]=series(mü*AE*Gc, Hc, Gp, Hp); % W0(s)
[Gya, Hya]=cloop(G0, H0); % WRay(s)
Gya=Gya/AE;
printsys(Gya, Hya, 's'); pause;
%=====
% A zárt rendszer stabilitásának
% vizsgálata
polus=roots(Hya); disp(polus); pause;
% A zárt rendszer alapjelre vonatkozó
% átmeneti függvénye és az irányító jel
t=0:1:199;
step(Gya, Hya, t); grid on;
title('A zárt rendszer vR(t) átmeneti...
függvénye'); pause;
[Gua, Hua]=feedback(mü*Gc, Hc, Gp*AE, Hp);
step(Gua, Hua, t); grid on;
title('A zárt rendszer uk(t) jele');
%=====
% Az ua(t)=10(1-exp(-t/20)) alapjelre
% adott válasz számítása
[Ga]=10; Ha=[20 1];
[Gy, Hy]=series(Ga, Ha, Gya, Hya);
step(Gy, Hy); grid on; pause;
ua=step(Ga, Ha, t); yA=ua/AE;
y=step(Gy, Hy, t); plot(t, yA, t, y);
title('Az w(t) és a wA(t) függvények');
%=====
disp('vége')
```

Megjegyzés

A fenti programban használt MATLAB-számítások az alrendszer $W(s) = G(s)/H(s)$ átviteli függvényei alapján történnek, ahol a $G(s)$ számláló és a $H(s)$ nevező az s Laplace-operátor polinomjai. Pl. a $W_p(s) = G_p(s)/H_p(s)$ motor átviteli függvénye $H_p(s)$ nevezőjének definiálása MATLAB alatt: $H_p = [T_m * T_v \ T_m \ 1]$; stb.

A `step(Gc, Hc)`; függvény a szabályozó átmeneti függvényét teszi ki a képernyőre.

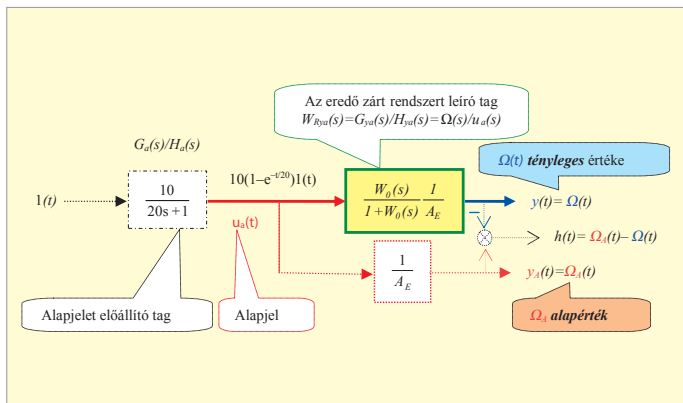
¹ A zavarás hatását ezzel a programmal nem analizáljuk.

A $v_p = \text{step}(G_p, H_p)$; a folyamat átmeneti függvényét teszi a v_p változóba.

A $[G_0, H_0] = \text{series}(G_c, H_c, G_p, H_p)$; az egymással soros kapcsolásban lévő $W_c(s) = G_c(s)/H_c(s)$, $W_p(s) = G_p(s)/H_p(s)$ tagok $W_0(s) = W_c(s)W_p(s) = G_0(s)/H_0(s)$ eredő átviteli függvényének számlálóját és nevezőjét számítja.

A **loop** és a **feedback** függvénnyel visszacsatolások eredő átviteli függvényeit lehet meghatározni.

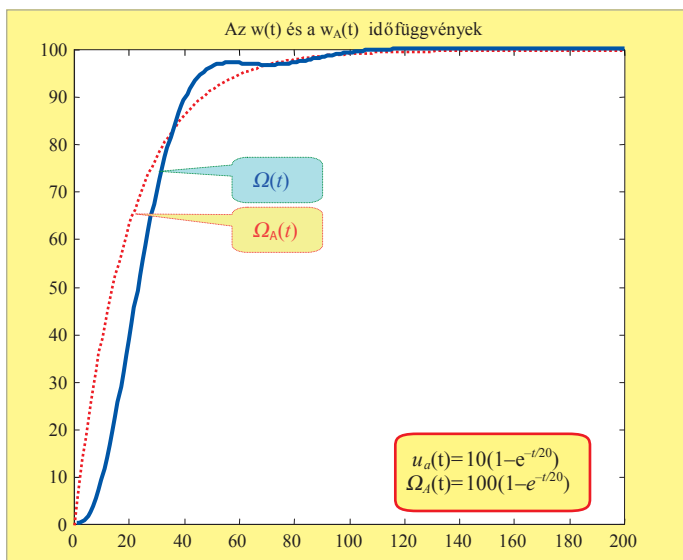
A program a zárt rendszer eredő átmeneti függvényén túlmenően az $u_a(t) = 10(1 - e^{-t/20})\mathbf{1}(t)$ alapjelre adott $y(t) = \Omega(t)$ választ is kiszámítja. Ennek módszerét a 1. ábrán szemléltetjük. Vegyük figyelembe, hogy a $G_a(s)/H_a(s) = 10/(1 + 20s)$ átviteli függvényű „előszűrő”-tag egységugrásra adott válasza az $u_a(t) = 10(1 - e^{-t/20})$ alapjel.



1. ábra Az u_a alapjel, az $\Omega_A(t)$ alapérték és az $\Omega(t)$ ténylegesérték számításának szemléltetése

Alkalmazkodva az előzőekben tárgyalt folyamat számszerűsített adataihoz, legyen $k_p = 1$, $k_z = 1$, $T_m = 20$, $T_v = 1$, a teljesítményerősítő jelerősítése $\mu = 10$, az érzékelőszerv átviteli tényezője $A_E = 1/10$. A szabályozó k_c és T_i paraméterei – első közelítésben most is „találomra” felvéve – szintén legyenek $k_c = 1$, $T_i = 5$. Ezekkel a programfutás néhány részeredményét közöljük. Ezek a zárt rendszer alapjelre vonatkozó $G_{ya}(s)/H_{ya}(s)$ eredő átviteli függvényei, ennek pólusai (a $H_{ya}(s) = 0$ gyökei), valamint az $u_a(t) = 10(1 - e^{-t/20})\mathbf{1}(t)$ alapjelre adott $\Omega(t)$ válasz idődiagramja. A 2. ábrán – a követési tulajdonságok szemléltetésére – az $u_a(t)$ alapjellel definiált $\Omega_A(t) = u_a(t)/A_E$ alapértéket és az $\Omega(t)$ tényleges értéket ábrázoltuk.

2. ábra A plot (t, y_A, t, y) hatására megjelenő képernyő



A program futásának eredményei:

```
printsys(Gya, Hya, 's'); pause;
num/den =
          50 s + 10
-----
100 s^3 + 100 s^2 + 10 s + 1

pulus=roots(Hya); disp(pulus); pause;

-0.9014
-0.0493 + 0.0931i
-0.0493 - 0.0931i
```

A kapott eredmények természetesen az állapotegyenlet alapján végzett számítások eredményeivel, de most az állapotváltozók (és köztük az üzemelés szempontjából fontos $i_a(t)$ armatúraáram) közvetlenül nem jelennek meg, mintegy „rejtve” maradnak². Az átviteli függvényre alapozott módszer legfontosabb előnye abban mutatkozik meg, hogy a szabályozó k_c és T_i paramétereinek meghatározására szisztematikus lehetőséget teremt.

A PI-szabályozó rendszertechnikai méretezése a frekvenciamódszer alapján

Az adott példában a nyitott kör eredő átviteli függvénye:

$$W_0(s) = W_c(s)\mu W_p(s)A_E = \frac{k_c \mu k_p A_E (1 + sT_i)}{sT_i(1 + sT_m + s^2T_mT_v)} = \frac{k(1 + sT_i)}{sT_i(1 + sT_m + s^2T_mT_v)} = \frac{G_0(s)}{H_0(s)} \quad k = k_c \mu k_p A_E$$

Ebben k_p, T_m, T_v, μ, A_E ismert paraméterek, a szabályozó k_c és T_i paramétereit kell megválasztani. $W_0(s)$ pólus–zérus eloszlást is kifejező időállandós normál alakja

$$W_0(s) = \frac{k(1 + sT_i)}{sT_i(1 + sT_m + s^2T_mT_v)} = \frac{k(1 + sT_i)}{sT_i(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

ahol pl. $T_m = 20$ és $T_v = 1$ paraméterek mellett:

$$T_1 T_2 = T_m T_v$$

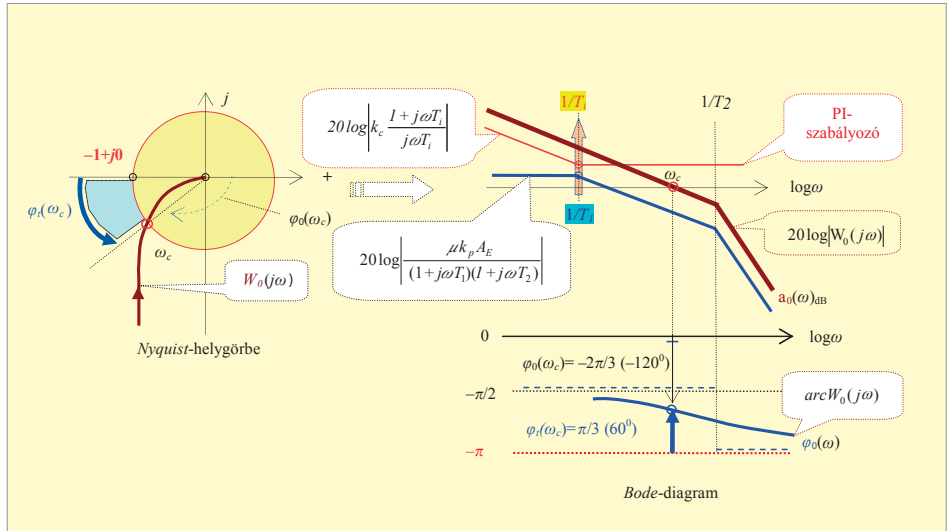
$$T_1 + T_2 = T_m$$

$$T_1 = \frac{T_m + \sqrt{T_m(T_m - 4T_v)}}{2} = \frac{20 + \sqrt{20(20 - 4)}}{2} = 18,9443$$

$$T_2 = \frac{T_m - \sqrt{T_m(T_m - 4T_v)}}{2} = \frac{20 - \sqrt{20(20 - 4)}}{2} = 1,0557$$

² A programozást az átviteli függvény módszerével végrehajtva természetesen az armatúraáram tranzienseit is nyomon lehetne követni. A sorozat1.m és sorozat2.m fájlok alatt található MATLAB-programok leírását, egyes utasításait és ezek sorrendiségét érdemesnek tartjuk a tanulmányozásra és reprodukálásra. Ezzel ugyanis képet kapunk a MATLAB segítségével elvégezhető feladatok megoldásainak módszereire, ill. a reprodukált program futtatásával olyan eredményeket is találunk, amelyeket terjedelmi okok miatt ebben az írásban nem közlünk. Ha valamelyik utasítás értelmezésével problémánk adódna, a MATLAB helpjéhez segítségért fordulhatunk (pl.>> help eig (enter) leírást ad a négyzetes mátrix sajátértékeit számító eig utasítás használatáról stb).

A nyitott kör $W_0(s)$ átviteli függvénynek egy zérusa ($-1/T_i$) és három pólusa ($p_1=0, p_2=-1/T_p, p_3=-1/T_2$) van. Az 1-típusú integrálszabályozásra az origóban lévő egyetlen $p_1=0$ pólus utal. Miután a **PI**-szabályozó hatására a $W_0(s)$ átviteli függvénynek a $-1/T_i$ helyen zérusa van, ezért ezzel a zérussal a folyamat nagyobbik T_1 időállandóból származó $-1/T_1$ pólusa kompenzálható. A $T_i=T_1$ **választással** tehát a $W_0(s)$ átviteli függvényben az $(1+sT_i)/(1+sT_1)=(1+sT_i)/(1+sT_1)=1$, ezért ezzel a tényezővel egyszerűsíteni lehet. Ez azt a látszatot³ kelti, mintha a nagyobbik időállandót a nyitott kör átviteli függvényéből „eltüntették” volna. Ennek eredményeként a nyitott kör felgyorsul, és ez valószínűsíthetően a zárt rendszer felgyorsulását is jelenti. Az egyszerűsítést elvégezve kapjuk:



3. ábra A felnyitott kör frekvenciaátviteli tulajdonságait leíró függvények

$$W_0(s) = \frac{k(1+sT_i)}{sT_i(1+sT_m+s^2T_mT_v)} = \frac{k(1+sT_i)}{sT_i(1+sT_1)(1+sT_2)} \Big|_{T_i=T_1} =$$

$$= \frac{k(1+sT_1)}{sT_1(1+sT_1)(1+sT_2)} = \frac{k}{sT_1(1+sT_2)} = \frac{k_c \mu k_p A_E}{sT_1(1+sT_2)}$$

Eredményként a nyitott kört az *egytárolós integráló tag* jellemzi, ami egyébként a másodrendű zárt rendszernek strukturális stabilitást is biztosít. A nyitott kör $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvényének Nyquist- és Bode-diagramjai a 3. ábrán láthatók.

A $T_i=T_1$ választás után ismeretlen paraméterként a szabályozó k_c átviteli tényezője maradt. Ezt annak a követelménynek az alapján méretezhetjük, hogy a felnyitott kör $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvényének $\varphi_0(\omega_c)=\pi/3$ (60°) fázistöbblete legyen. Ez a zárt rendszer stabilitásán túlmenően elfogadható robusztusságot és a zárt kör alapjelre vonatkozó átmeneti függvényének kb. $\sigma < 10\%$ alatti túllendülést is biztosít. Ez a szokásos minőségi követelményeknek általában megfelel. A nyitott kör frekvenciafüggvénye:

$$W_0(j\omega) = W_0(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{k_c \mu k_p A_E (1+j\omega T_i)}{j\omega T_i [1+j\omega T_m + (j\omega)^2 T_m T_v]} =$$

$$= \frac{k(1+j\omega T_i)}{j\omega T_i (1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} \Big|_{T_i=T_1} =$$

$$= \frac{k(1+j\omega T_1)}{j\omega T_1 (1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} =$$

$$= \frac{k}{j\omega T_1 (1+j\omega T_2)} \quad k = k_c \mu k_p A_E$$

Az amplitúdó- és a fázismenet innen:

$$absW_0(j\omega) = a_0(\omega) = \frac{k}{\omega T_1 \sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}$$

$$arcW_0(j\omega) = \varphi_0(\omega) = -\frac{\pi}{2} - arctg(\omega T_2)$$

Miután $\varphi_0(\omega)$ nem függ a k átviteli tényezőtől, ezért a

$$\varphi_t(\omega_c) = \pi + arcW_0(j\omega_c) = \pi + \varphi_0(\omega_c) =$$

$$= \pi + \left[-\frac{\pi}{2} - arctg(\omega_c T_2)\right] = \frac{\pi}{2} - arctg(\omega_c T_2)$$

kifejezéséből (a $\varphi_t(\omega_c)$ fázistöbblet *előírásának* ismeretében) a nyitott kör $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvényének az ω_c **vágási kör-frekvenciája** kiszámítható⁴.

$$arctg(\omega_c T_2) = \frac{\pi}{2} - \varphi_t(\omega_c) \Rightarrow \omega_c = \frac{tg\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_t\right)}{T_2}$$

Ennél az ω_c vágási körfrekvenciánál az $absW_0(j\omega_c)=1$ feltételt is be kell tartani. A fázistöbbletre $\varphi_t(\omega_c)=\pi/3$ követelményt előírva, ennek felhasználásával:

$$absW_0(j\omega_c) = a_0(\omega_c) = \frac{k_c \mu k_p A_E}{\omega_c T_1 \sqrt{1+\omega_c^2 T_2^2}} =$$

$$= \frac{k_c \mu k_p A_E}{\frac{tg\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_t\right)}{T_2} T_1 \sqrt{1 + \left(\frac{tg\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_t\right)}{T_2}\right)^2 T_2^2}} = 1$$

$$k_c = \frac{tg\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_t\right) T_1}{\mu k_p A_E T_2} \sqrt{1 + \left(\frac{tg\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_t\right)}{T_2}\right)^2 T_2^2} =$$

$$= \frac{tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) 18,9443}{10 \frac{1}{10} 1,0557} \sqrt{1 + \left(\frac{tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)}{3}\right)^2} = 11,9632$$

(Folytatjuk!)

szbela@iit.bme.hu
juhaszne@iit.bme.hu

³ Ez azért *látszat*, mert a valóságban az időállandók mindegyike jelen van, és az irányítójel **túlvézelésének hatására** keletkezik az a megtévesztő érzés, mintha a nyitott kör T_1 késleltetést okozó időállandója „eltűnt” volna.

⁴ Ne feledkezzünk meg arról, hogy $\varphi_t(\omega)$ *méretezési előírás*. Szokásos értéke $45^\circ < \varphi_t(\omega) < 60^\circ$. Ha $\varphi_t(\omega)=0$, a zárt szabályozási rendszer a *stabilitási határhelyzetében* van. Ez nyilvánvalóan **nem megengedett** üzemmódot!