

Szabályozástechnika 28.

A szabályozás rendszertechnikai méretezése – 7.

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencé

A $W_c(s)$ átviteli függvényű, általában PID-tulajdonságokkal rendelkező szabályozó rendszertechnikai méretezése a nyitott hatáslánc $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvényének $\varphi_i(\omega_c)$ fázistöbbletén és ω_c vágási körfrekvenciáján alapszik. A szabályozó K , T_I , T_D és T paramétereivel lehet befolyást gyakorolni a fázistöbbletre és a vágási körfrekvenciára. A paraméterek megválasztásához a nyitott kör frekvenciafüggvényének aszimptotikus Bode-diagramjai nyújtanak támpontot, és ezen túlmenően a zárt rendszer eredő átmeneti függvényének a minőségi jellemzőivel is kapcsolatba hozhatók.

A szabályozó méretezése a frekvenciamódszer alapján

A frekvenciamódszer alapján történő méretezési eljárás a nyitott kör $W_0(j\omega) = W_c(j\omega)W_p(j\omega)$ frekvenciafüggvényének – a szabályozó $W_c(j\omega)$ frekvenciafüggvényével történő – olyan befolyásolására épül, amelynek eredményeként a zárt szabályozási rendszer $v_R(t)$ eredő átmeneti függvénye a minőségi követelményeknek megfelel.

A zárthurkú szabályozási rendszer minőségi jellemzőinek kapcsolata a nyitott kör $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvényével

A szabályozási rendszer minőségi jellemzőit a zárt kör $v_R(t)$ átmeneti függvénye alapján szokás megfogalmazni. Ezen minőségi jellemzők fontosabb típusai – mint már korábban láttuk – a $\sigma(\%) = \{[v_{Rmax} - v_R(\infty)] / v_R(\infty)\} \cdot 100$ túllendülés, a T_Δ szabályozási idő, a 2Δ dinamikus hibásáv és a $h(\infty) = 1 - v_R(\infty)$ állandósult hiba. Ezek szoros kapcsolatban vannak a nyitott kör $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvényével.

A nyitott kör $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvényének meghatározó adatai:

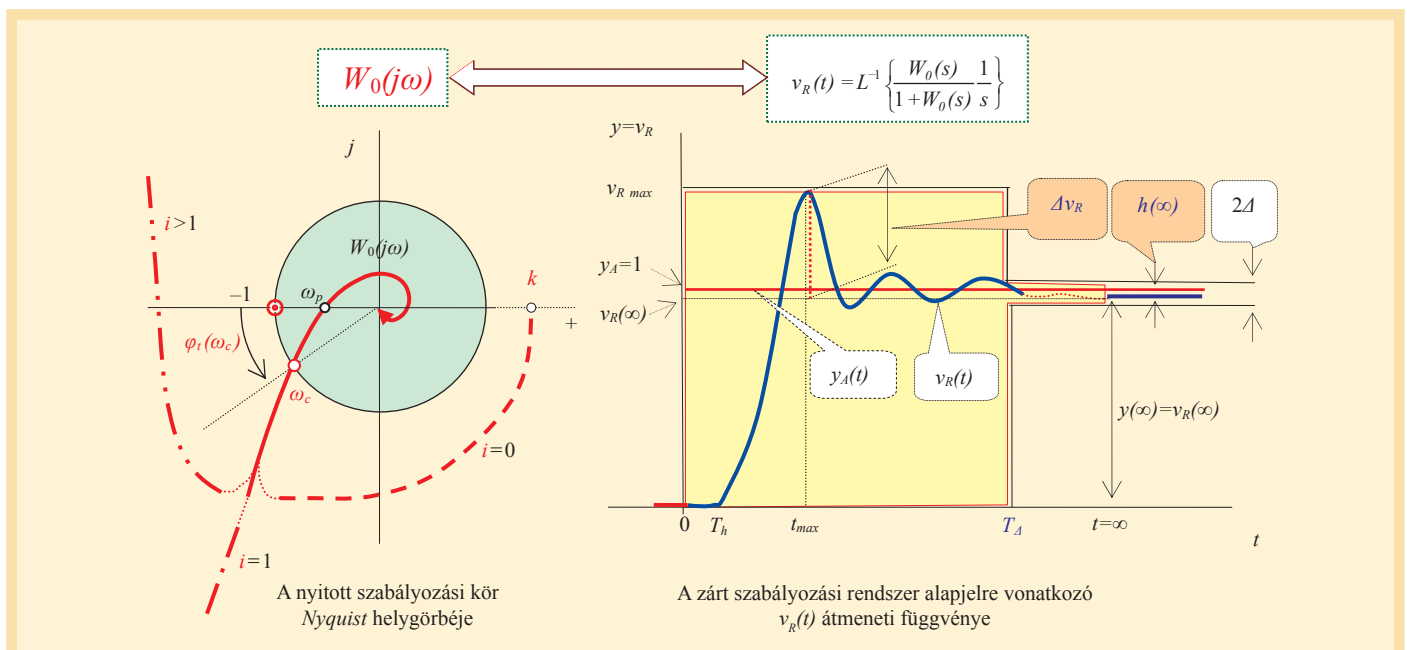
- Az ω_c vágási körfrekvencia (az ω körfrekvencia azon értéke, amelynél a $W_0(j\omega)$ Nyquist-helygörbe az egység sugarú körbe

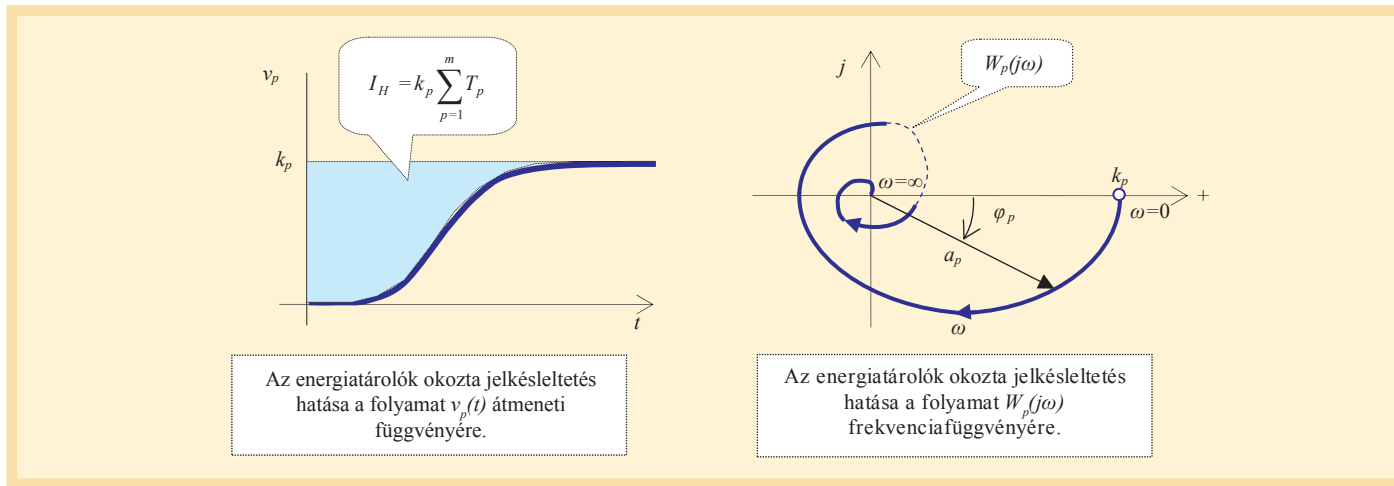
belép, vagy ahol az $a(\omega)_{dB}$ amplitúdómenet metszi a 0 dB tengelyt: $absW_0(j\omega_c)=1, a_0(\omega_c)_{dB}=0$),

- A $\varphi_0(\omega_c)$ fázisszög (a $W_0(j\omega)$ komplex vektor szöge az ω_c vágási körfrekvencián),
- A $\varphi_i(\omega_c) = \pi + \varphi_0(\omega_c)$ fázistöbblet,
- Az ω_p körfrekvencia (amely körfrekvenciánál a $W_0(j\omega)$ Nyquist-helygörbe metszi a negatív képzetes tengelyt, ill. ahol a $W_0(j\omega_p)$ komplex vektor szöge $\varphi(\omega_p) = -\pi$),
- Az $a_i(\omega_p)$ amplitúdótöbblet (a_i -szeresére növelve $absW_0(j\omega_p)$ értékét, a zárt rendszer a stabilitás határára kerül),
- A k körerősítés (az $i=0$ típusú arányos szabályozás nyitott körű átviteli függvényének eredő átviteli tényezője, dimenziótlan), a k_i integrálási körerősítés (az $i \geq 1$ típusú integrálszabályozás nyitott körű átviteli függvényének integrálási átviteli tényezője, $dim[k_i] = [1/s^i]$),
- Az i típusszám (a nyitott körben lévő szabad integrátorok darabszáma, a $W_0(s)$ origóban lévő pólusainak száma).

Ezen jellemzők közül az ω_c vágási körfrekvencia a T_Δ szabályozási időt, a $\varphi_i(\omega_c) = \pi + \varphi_0(\omega_c)$ fázistöbblet a σ túllendülést, a k körerősítés és az i típusszám pedig a $h(\infty)$ állandósult hibát befolyásolja (1. ábra).

1. ábra Kapcsolat a $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvény és a $v_R(t)$ átmeneti függvény között





2. ábra A folyamat $v_p(t)$ átmeneti- és $W_p(j\omega)$ frekvenciafüggvényei

Tapasztalati adatok és elméleti vizsgálatok alapján¹:

$W_0(j\omega)$	\rightarrow	$v_R(t)$
ω_c	\rightarrow	$3/\omega_c < T_\Delta < 10/\omega_c$
ha $\varphi_i(\omega_c) > \pi/3$ (60°), akkor	\rightarrow	$\sigma < 10\%$
k, i	\rightarrow	$h(\infty) = k/(1+k)$ ha $i=0$ $h(\infty) = 0$ ha $i: 1, 2, 3$

Ezekből a kapcsolatokból az következik, hogy a gyors működéshez nagy ω_c vágási körfrekvenciát, az elfogadható mértékű σ túllendüléshez $\varphi_i(\omega_c) \geq \pi/3$ (60°) fázistöbbletet, az alacsony értékű h statikus hiba eléréséhez pedig nagy k körerősítést (0-típusú szabályozáskor) vagy integrálszabályozást ($i \geq 1$) kell megvalósítani.

A $W_0(j\omega) = W_c(j\omega)W_p(j\omega)$ frekvenciafüggvényre való befolyásunk a szabályozó $W_c(j\omega)$ frekvenciafüggvényén keresztül érvényesül. Stabilis, minimumfázisú $W_0(j\omega)$ esetén a $\varphi_i(\omega_c) > \pi/3$ feltétel a stabilitáson túlmenően a túllendülésre vonatkozó minőségi garanciát is jelenti. Bode kimutatta², hogy a stabilis, minimumfázisú $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvény $a_0(\omega) = abs W_0(j\omega)$ teljes (az ω körfrekvencia $0 < \omega < \infty$ intervallumán értelmezett) amplitúdómenete a $\varphi_0(\omega_c) = arc W_0(j\omega_c)$ fázisszöveget egyértelműen meghatározza az alábbi kifejezés szerint:

$$\varphi_0(\omega_c) = arc W_0(j\omega_c) \cong \frac{\pi}{2} \frac{d \log |W_0(j\omega)|}{d \log \omega} \Big|_{\omega_c} = \frac{\pi}{2} \frac{d \log a_0(\omega)}{d \log \omega} \Big|_{\omega_c}$$

Ez azt jelenti, hogy abban az esetben, ha a nyitott kör frekvenciafüggvényének logaritmikus amplitúdó meneten a $d \log a_0(\omega) / d \log \omega$ meredekség az ω_c vágási körfrekvencián -1 (vagyis a logaritmikus léptékezés miatt -20 dB/dekád), akkor itt a fázisszög $\varphi_0(\omega_c) \approx -\pi/2$. Ekkor a $\varphi_i(\omega_c) = \pi + \varphi_0(\omega_c) \approx \pi/2$ fázistöbbletet meghaladja a $\pi/3$ értéket. Az ebből származtatható „ököl szabály” szerint tehát **úgy kell kialakítani a nyitott kör $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvényének $a_0(\omega)_{dB}$ amplitúdómenetét, hogy az egy elegendő hosszúságú szakaszon -20 dB/dekád meredekséggel messe a 0 dB-es tengelyt.** Ez az eredmény – a gyakorlat által is visszaigazolt módon – támpontot ad a szabályozó méretezésére.

¹ Ha a zárt rendszer tulajdonságai egy domináns pólusszárral jellemezhetők, akkor a nyitott kör $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvényének $\omega_c, \varphi_i(\omega_c)$ és i adatai, valamint a zárt rendszer $v_R(t)$ átmeneti függvényének T_Δ, σ , és $h(\infty)$ adatai között analitikus függvénykapcsolat is felírható.
² Bode tételeinek levezetését itt nem közöljük. Irodalom: Bode: Hálózatok és visszacsatolt erősítők tervezése, Műszaki Kiadó 1961.

A folyamatok jelentős részének a jelátviteli tulajdonságai azal jellemezhetők, hogy általában *önbeállóak* (tehát aszimptotikusan stabilisak), és energiátárolók okozta $-T_p$ időállandókkal jellemezhető – jelkésleltetésekkel rendelkeznek³. Az átviteli- és a frekvenciafüggvényük tipikus alakja ilyenkor:

$$W_p(s) = \frac{G_p(s)}{H_p(s)} = \frac{k_p}{\prod_{p=1}^m (1 + sT_p)} = \frac{k_p}{(1 + sT_1)(1 + sT_2) \dots (1 + sT_m)}$$

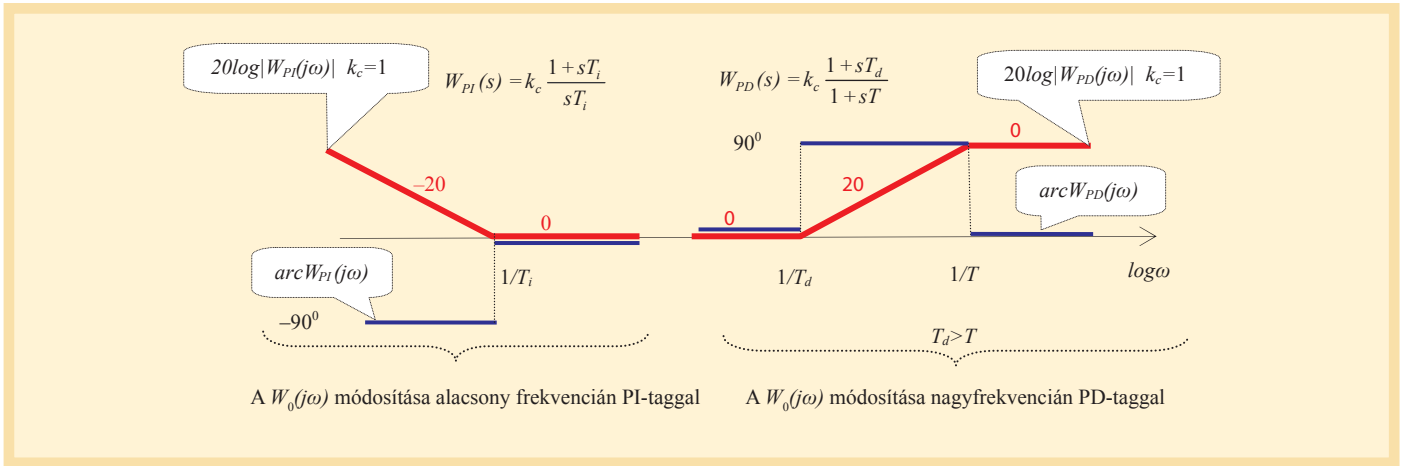
$$W_p(j\omega) = \frac{G_p(j\omega)}{H_p(j\omega)} = \frac{k_p}{\prod_{p=1}^m (1 + j\omega T_p)} = \frac{k_p}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) \dots (1 + j\omega T_m)}$$

Az ilyen folyamatoknak jellegzetes $v_p(t)$ átmeneti függvényük és jellegzetes $W_p(j\omega)$ frekvenciafüggvényük van. Ezek grafikonjait a 2. ábra tartalmazza.

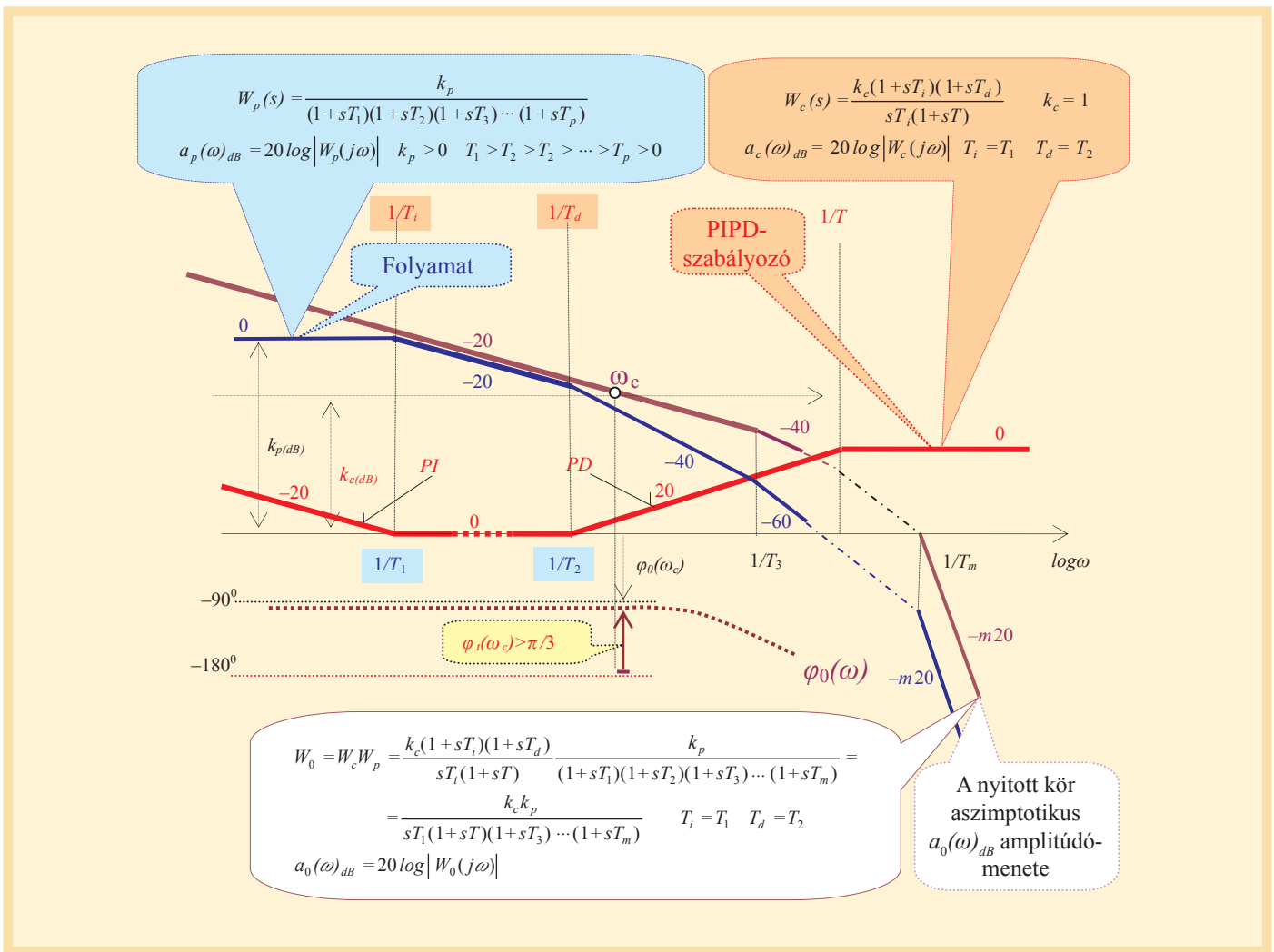
Az átmeneti függvény monoton növekedve veszi fel a $v_p(\infty) = k_p$ állandósult értékét, az I_H lineáris szabályozási területtel is jellemezhető jelkésleltetése az időállandók összegének k_p -szereése. A frekvenciafüggvény $a_p(\omega)$ amplitúdómenete a valós tengely k_p pontjából kiindulva monoton csökken $a_p(\omega)_{\omega=\infty} = 0$ értékre, miközben a $\varphi_p(\omega)$ fázis menet zérusról $-\pi/2$ -re változik. A $W_p(j\omega)$ helygörbe a valós tengely k_p pontjából indul és az origóba tart. Annyi síknegyeden halad át, amennyi a folyamat átviteli függvényének az m rendszáma.

Ha a $T_1 > T_2 > \dots > T_p > \dots > T_m > 0$ időállandók és a $k_p > 0$ átviteli tényező adott értékek, akkor a frekvenciafüggvény $20 \log |W_p(j\omega)|$ aszimptotikus amplitúdómenete alapján választhatók meg a $W_p(s)$ átviteli függvényű folyamattal soros kapcsolást alkotó, $W_c(s)$ átviteli függvényű szabályozó paraméterei. A paraméterválasztás azon az elven alapszik, hogy a folyamat amplitúdómenetének a $1/T_1 < \omega < 1/T_2$ körfrekvencia intervallumban eleve van egy -20 dB/dekád meredekségű szakasza, amit a nyitott kör amplitúdómenetének is részesévé tehetünk.

³ Léteznek labilis tulajdonságú folyamatok is. Ezeknek az átviteli függvényében a stabilitást megjelenítő, pozitív valósrésztű pólus található. A labilis folyamat nem önbeálló, átmeneti függvénye a pozitív pólus miatt minden határon túl növekszik.



3. ábra A PI- és PD-fokozatok aszimptotikus Bode-diagramjai



4. ábra A folyamat-, a szabályozó- és a nyitott kör Bode-diagramjának aszimptotikus amplitúdómenetei

Ezért a szabályozónak olyan amplitúdómenettel kell rendelkeznie, ami az $\omega < 1/T_1$ alacsonyfrekvenciás tartományban -20 dB/dekád meredekségű amplitúdómenetet, az $\omega > 1/T_2$ nagyfrekvenciás tartományban $+20$ dB/dekád meredekségű amplitúdómenetet iktat a nyitott kör amplitúdómenetébe, miközben a folyamatra jellemző $1/T_1 < \omega < 1/T_2$ középfrekvenciás tartományt változatlanul hagyja⁴. Az aszimptotikus Bode-diagram amplitúdómenetének töréspontjait az átviteli függvény pólusai és zérusai jelölik ki, ezért a $W_p(s)$

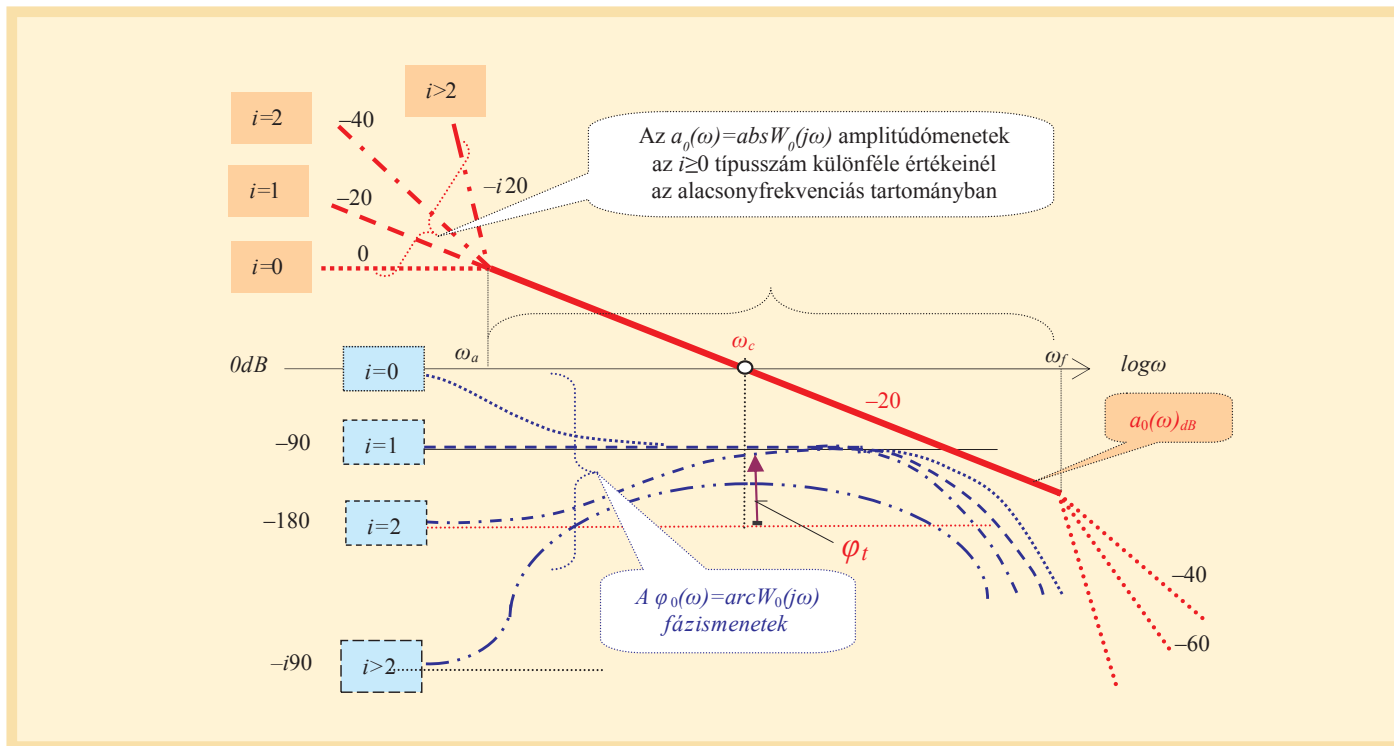
⁴ Ezzel lényegében a folyamat amplitúdómenetének -20 dB/dekád meredekségű szakaszát hosszabbíthatjuk meg.

átviteli függvénnyel soros kapcsolást alkotó szabályozó $W_c(s)$ átviteli függvényének paraméterválasztására fontos támpontot kaphatunk⁵.

Az alacsonyfrekvenciás ($\omega < 1/T_i$), ill. a „nagyfrekvenciás” ($\omega > 1/T_d$) szakaszokon történő átalakításokat megvalósító tagok Bode-diagramjait a 3. ábrán szemléltetjük.

Ezeket a PI- és PD-tagokat a nyitott körbe sorosan beiktatva a 4. ábrán található Bode-diagramokat kapjuk.

⁵ Ha egy $\omega = 1/T_p$ helyen lévő töréspontban az amplitúdómenetben -20 dB/dekád meredekségváltozás jelenik meg, akkor itt a folyamat átviteli függvényének pólusa van. Hasonlóan, a töréspontban észlelhető $+20$ dB/dekád meredekségváltozás a folyamat zérusára utal.



5. ábra $W_0(j\omega)$ kialakítása a típusszám különféle értékeinél

Miután a logaritmusos léptékű diagramokon az amplitúdómenetek komponensei összegződnek, az eredő amplitúdómenet kialakulásának szemléltetése az aszimptotikus közelítéseken igen egyszerű. A $W_c(j\omega)$ amplitúdómenetéből láthatóan a szabályozó egy $k_c(1+sT_i)/(sT_i)$ átviteli függvényű PI-fokozat és egy $(1+sT_d)/(1+sT)$ átviteli függvényű PD-fokozat⁶ soros kapcsolatából áll, vagyis egy lehetséges PIPD-szabályozó átviteli függvénye:

$$W_c(s) = k_c \underbrace{\frac{(1+sT_i)}{sT_i}}_{PI} \underbrace{\frac{(1+sT_d)}{(1+sT)}}_{PD}$$

Az előzőeknek megfelelően a szabályozó T_i és T_d paramétereit a folyamat legnagyobb ($T_i = T_1$) és a folyamat második legnagyobb ($T_d = T_2$) időállandója szerint célszerű megválasztani. Ilyen választás mellett $W_0(j\omega)$ logaritmusos amplitúdómenetén kialakítható egy hosszan tartó, -20 dB/dekád meredekségű egyenes szakasz (ahol $\varphi_0(\omega) \approx -\pi/2$), amelyen az ω_c vágási körfrekvencia helyét úgy kell kijelölni, hogy tőle a -40 dB/dekád meredekségű szakaszok töréspontjai lehetőleg távoli helyeken legyenek. Ez a k_c erősítéssel állítható be. A k_c változtatása a fázismentre befolyást nem gyakorol, a logaritmusos amplitúdómenetet viszont önmagával párhuzamosan felfelé (\uparrow) vagy lefelé (\downarrow) mozgatja. A PD-fokozat $T < T_d$ időállandója a realizálás szükségzerű velejárója, értéke azonban nem lehet tetszőlegesen „kicsi”, mert az irányítójel túlvezérlésének mértékét a $k_c T_d / T$ viszony befolyásolja.

A PI-fokozat integráló csatornája miatt a szabályozás $i=1$ típusú integrálszabályozás, a zárt rendszer $v_R(t)$ átmeneti függvényének végértéke $v_R(\infty) = u_a(\infty) = 1$. Ezért az irányítójel állandósult értéke $u(\infty) = 1/k_p$. Figyelembe véve, hogy a $t=0$ időpontban $v_R(0) = y(0) = 0$ és $u(0) = k_c T_d / T$, az u irányítójel túlvezérlési aránya: $u_i = u(0)/u(\infty) = k_c k_p T_d / T = k_c k_p T_2 / T$. A gyakorlati alkal-

mazásokban – az indokolatlanul nagy túlvezérlések elkerülésének céljából – a szokásos választás $T = T_d / 10 = T_2 / 10$, ekkor a túlvezérlési arány $u_i = 10 k_c k_p$.

Az előzőekben vázolt méretezési eljárás során ismételtlen tapasztalhattuk, hogy az adott folyamathoz illesztett PIPD-szabályozó paramétereit úgy célszerű megválasztani, hogy a $T_i = T_1$ és $T_d = T_2$ értékadással kompenzáljuk (egyszerűsítéssel „kiejtjük”) a folyamat két legnagyobb időállandójából származó pólusait, a k_c erősítéssel beállítjuk az ω_c vágási körfrekvenciát, a PD-fokozat T időállandójával pedig korlátozzuk a túlvezérlési arányt.

A követési tulajdonságok javítása érdekében előfordulhat, hogy a típusszámot $i > 1$ szerint kell megválasztani. A nyitott kör Bode-diagramja a típusszám különféle értékeinél a 5. ábrán láthatók.

Ilyen esetben az $a_0(\omega)_{dB}$ amplitúdómenet az alacsonyfrekvenciás szakaszon -20 dB/dekád meredekséggel indul, amit a vágási körfrekvencia környezetében (kb. 2 dekádnyi körfrekvencia-intervallumban) -20 dB/dekád meredekségre kell mérsékelni. Ezt a stabilizálási feladatot a PD-tagok sorozatával lehet megvalósítani. A típusszám növelésével a $\varphi_0(\omega)$ fázisment az alacsonyfrekvenciás tartományban $\varphi_0(\omega) \approx -\pi/2$, amit az ω_c környezetére $\varphi_0(\omega_c) > -\pi$ értékre kell „visszahozni”. A típusszám növekedésével ez egyre nehezebb megoldásokat igényel.

Ha a típusszám $i \geq 2$, a $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvény fázismentete az alacsonyfrekvenciás szakaszon $\varphi_0(\omega) < -\pi$. Megfelelően méretezett soros kompenzációval ugyan a stabilitás biztosításához a $\varphi_0(\omega_c) > 0$ beállítható, de a zárt rendszer aszimptotikus stabilitása csak egy adott $k_{min} < k < k_{max}$ körerősítés intervallumban lesz biztosítható (feltételes stabilitás). Mindezek miatt a típusszám növelése mértéktartást igényel.

(Folytatjuk!)

⁶ Ez az átviteli függvény akkor absztrahál PD-fokozatot, ha $T_d > T > 0$.