Szabályozástechnika 27.

A szabályozás rendszertechnikai méretezése – 6.

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencné

A szabályozási rendszer nyitott és zárt körének frekvenciaátviteli tulajdonságait a $W_0(j\omega)=a_0(\omega)exp[j\varphi_0(\omega)]$ és a $W_R(j\omega)=M(\omega)exp[j\alpha(\omega)]$ frekvenciafüggvények jellemzik. Az $M(\omega)$ függvény $M(\omega_r)=M_{max}$ értéke a zárt rendszer $v_R(t)$ átmeneti függvényének túllendülését is megszabja, ezért a frekvenciafüggvények vizsgálata, illetve ennek a szabályozó tulajdonságaival történő alakítása meghatározó jelentőségű.

A rendszertechnikai méretezés elve

A szabályozási rendszer analízisének elsődleges célja az, hogy reális igényeket támasszunk a zárt rendszer dinamikus tulajdonságait illetően, és támpontot kapjunk a szabályozó átviteli függvényében szereplő paraméterek megválasztásához. A szabályozási rendszerrel szembeni követelmények a zárt rendszer értéktartási és követési tulajdonságait meghatározó *minőségi jellemzőkre* vonatkoznak. Ezek kielégítésére választjuk meg a szabályozási algoritmust (ezt a műveletet tekintjük a szabályozó rendszertechnikai méretezésének), majd meg kell tervezni azt a technikai eszközt is, amely a szabályozási algoritmust realizálja[1]. A szabályozási rendszerrel szemben támasztott követelményeknek természetesen reális igényeknek[2] kell lenniük, mert csak ekkor van esély arra, hogy létezzen egy technikailag is megvalósítható szabályozó.

Lineáris szabályozás esetében a rendszertechnikai méretezés azt jelenti, hogy a folyamat $W_p(s)$ átviteli függvényének ismeretében meg kell határozni a szabályozó $W_c(s)$ átviteli függvényét, miközben a zárt rendszer $W_R(s)=W_0(s)/[1+W_0(s)]$ eredő átviteli függvényére –, illetve a $W_R(j\omega)$ frekvenciafüggvényére – vagy a $v_R(t)=L^{-1}\{W_R(s)/s\}$ átmeneti függvényére különféle követelményeket írunk elő. A méretezés **formális** megoldása igen egyszerű. Ha ugyanis méretezési *előírásnak* egy előzetesen felvett $W_{Rm}(s)=y(s)/u_a(s)$ rendszermodellnek megfelelő működést tekintünk, akkor azt kívánjuk, hogy a valóságos fizikai rendszer $W_R(s)$ átviteli függvénye a felvett $W_{Rm}(s)$ modellel legyen azonos. Vagyis a

$$W_R(s)=W_{Rm}(s)=\frac{W_0(s)}{1+W_0(s)}=\frac{W_c(s)W_p(s)}{1+W_c(s)W_p(s)}$$

matematikai modell szerint működő zárt szabályozási rendszerben a szabályozó átviteli függvényének[3]

$$W_c(s)=\frac{1}{W_p(s)}\frac{W_{Rm}(s)}{1-W_{Rm}(s)}$$

kellene lennie (*Truxal – Guillemin*-szabályozó).

Az így meghatározott szabályozó egy formális tervezési eljárást jelent, ugyanis a $W_c(s)$ átviteli függvény egy matematikai egyenlet átrendezésének az eredménye. Jelentősége kizárólag akkor van, ha a kapott eredmény fizikailag is realizálható szabályozó megvalósítását eredményezi. Miután a folyamat $W_p(s)=G_p(s)/H_p(s)$ átviteli függvényének $H_p(s)$ nevezője általában a $G_p(s)$ számlálójánál magasabb fokszámmal rendelkezik (adott esetben még holtidős tényezőt is tartalmazhat), ezért $1/W_p(s)$ többnyire nem realizálható[4]. A $W_{Rm}(s)$ megválasztásakor ezt figyelembe kell venni. Általános szabálynak tekinthetjük, hogy a szabályozó realizálhatósága miatt $W_{Rm}(s)$ nevezőjének fokszámát $W_p(s)$ nevezőjének fokszámával azonosra vagy attól nagyobbra kell választanunk. Ilyen feltételek mellett a rendszerből pólus nem tűnik el (ami egyébként elméletileg nem is lehetséges), legfeljebb újabb pólus beiktatására kerül sor. A $W_{Rm}(s)=1$ ideális eset lenne, de ennek irrealitása a $W_c(s)=\infty/W_p(s)$ kifejezéséből is nyilvánvaló.

Az $i\geq 0$ típusszámmal[5] rendelkező, holtidő nélküli nyitott kör átviteli függvényének időállandós normálalakja:

$$W_0(s)=\frac{G_0(s)}{H_0(s)}=W_c(s)W_p(s)=$$

$$=\frac{k}{s^i}\frac{\prod_{l=1}^{m_1}(1+s\tau_l)\prod_{l=1}^{m_2}(1+2\mu_l\tau_{0l}s+\tau_{0l}^2s^2)}{\prod_{l=1}^{n_1}(1+sT_l)\prod_{l=1}^{n_2}(1+2\xi_lT_{0l}s+T_{0l}^2s^2)}=\frac{k}{s^i}Z_0(s)\quad .$$

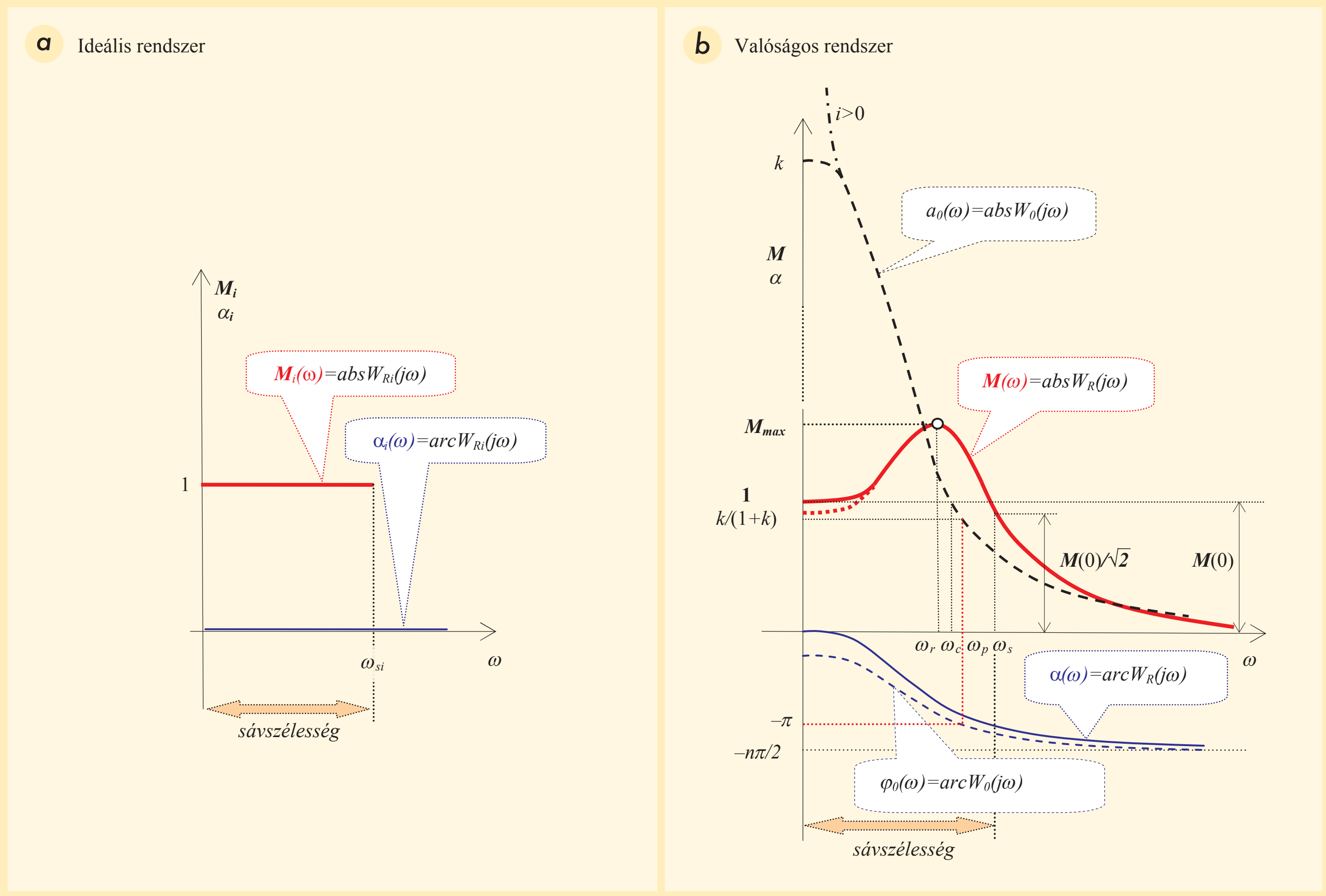
1 Ez az eszköz a technikai fejlődés mai szintjén egy **PLC** (**P**rogramable **L**ogic **C**ontroller) vagy egy folyamatirányító digitális számítógép.

2 Nem reális követelmény lenne például az olyan igény, hogy az *y(t)* szabályozott jellemző időkésleltetés nélkül kövesse az $u_a(t)$ alapjelet, és legyen teljesen független az $u_z(t)$ zavarójeltől.

3 Ezt az eljárást a szabályozó direkt méretezésének is nevezik.

4 Ha $W_c(s)=k/W_p(s)=kH_p(s)/G_p(s)$ választás lehetséges lenne, akkor $W_0(s)=W_c(s)W_p(s)=k$ kifejezés szerint a nyitott kör időkésleltetés nélküli arányos tag lenne, a zárt kör algebrai hurkot alkotna. Ennek gyakorlati realitása azonban nincs, mivel $W_p(s)$ $H_p(s)$ nevezője általában a $G_p(s)$ számlálójánál magasabb fokszámmal rendelkezik, és a folyamatban a holtidő okozta késleltetés is jelen van.

5 Típusszám a nyitott körben lévő szabad integrátorok száma. Ezzel egyenértékű megfogalmazásban a $W_0(s)$ átviteli függvény origóban lévő pólusainak darabszáma.



1. ábra A zárt rendszer frekvenciafüggvényének $M_i(\omega)$ ideális és $M(\omega)$ valóságos alakjai

Ebben k a nyitott kör körerősítése (i=0) vagy integrálási átviteli tényezője (i>0), a $Z_0(s)$ pedig olyan algebrai tört, amelynek a komplex számsík origójában nincs sem zérusa, sem pólusa, és az s=0 helyen vett helyettesítési értéke $Z_0(s)_{s=0}=Z(0)=1$. Mivel $W_0(s)$ számlálójának $m=m_1+2m_2$ fokszáma (a folyamat energiatárolásból származó jelkésleltetései miatt) általában kisebb a nevezőjének $n=i+n_1+2n_2$ fokszámánál, ezért $W_0(s)_{s=\infty}=W_0(\infty)=0$. Mindezen tulajdonságok a zárt rendszer $W_R(s)=W_0(s)/[1+W_0(s)]$ átviteli függvénnyel leírható jelátviteli viszonyaira is kihatnak. A zárt szabályozási rendszer alapkövetelménye a stabilitás, ezért $W_R(s)$ önbeálló tagot jellemez, minden p_{Ri} pólusa a komplex sík stabilis (negatív valós részű) félsíkján van.

A zárt rendszer frekvenciaátviteli tulajdonságait leíró frekvenciafüggvény $W_R(s)$ alapján közvetlenül felírható:

$$W_R(j\omega)=W_R(s)_{s=j\omega}=\frac{W_0(j\omega)}{1+W_0(j\omega)}=$$

$$=\frac{\dfrac{k}{(j\omega)^i}Z_0(j\omega)}{1+\dfrac{k}{(j\omega)^i}Z_0(j\omega)}=\frac{kZ_0(j\omega)}{(j\omega)^i+kZ_0(j\omega)}$$

$$W_R(j\omega)_{\omega=0}=\begin{cases}\dfrac{kZ_0(0)}{(j0)^0+kZ_0(0)}=\dfrac{k}{1+k} & i=0\\[2ex] \dfrac{kZ_0(0)}{(j0)^i+kZ_0(0)}=\dfrac{k}{k}=1 & i>0\end{cases}$$

$$W_R(j\omega)_{\omega=\infty}=\frac{W_0(j\infty)}{1+W_0(j\infty)}=\frac{0}{1}=0 \qquad .$$

A zárt rendszer frekvenciafüggvényének $M(\omega)$ és $\alpha(\omega)$ görbéi

A szabályozási rendszert „támadó" determinisztikus külső jelek az u_a alapjel és az u_z zavarójelek. Ezeken túlmenően a zárt rendszeren belül keletkezhetnek olyan, ún. mérési és egyéb forrásból származó zajok is, amelyeknek frekvenciaspektruma általában a nagyfrekvenciás tartományban van. A kis- és középfrekvenciájú összetevőkből álló alapjelet lehetőség szerint „torzítás nélkül" kellene a zárt rendszernek magán átengednie, a mérési zajokat és a zavarójeleket pedig el kellene nyomnia. Az ideális feltételeknek megfelelő működést biztosító zárt rendszer $W_{Ri}(j\omega)=M_i(\omega)exp[j\alpha_i(\omega)]$ frekvenciafüggvényének $M_i(\omega)$ amplitúdó- és $\alpha_i(\omega)$ fázismenete ezért:

$$M_i(\omega)=\begin{cases}1 & 0<\omega<\omega_{si}\\ 0 & \omega>\omega_{si}\end{cases}$$

$$\alpha_i(\omega)\;=\;0 \qquad 0<\omega<\infty \qquad ,$$

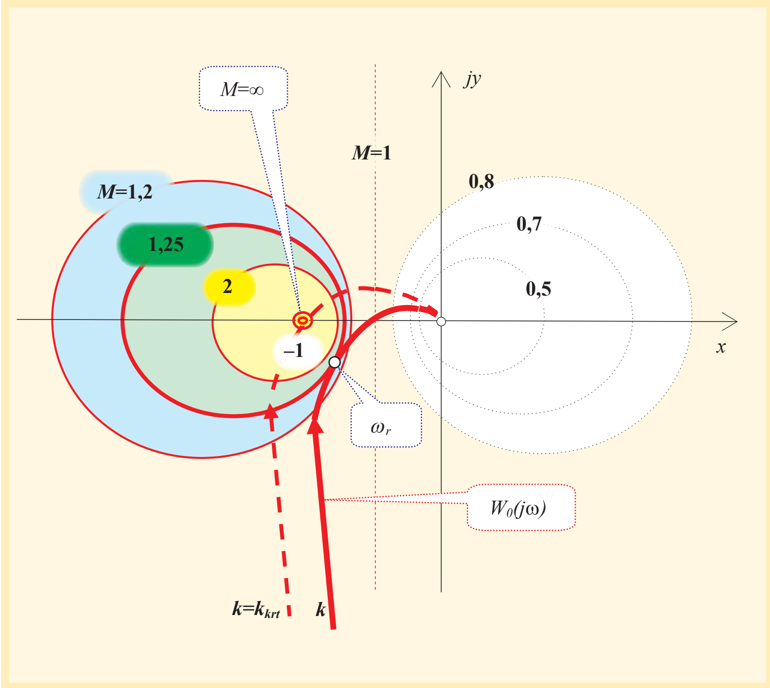
ahol ω_{si} az ideális rendszer frekvenciafüggvényének a *sávszélessége*. Ilyen rendszerben a $0<\omega<\omega_{si}$ frekvenciaspektrummal rendelkező alapjel változatlan formában jelenne meg a rendszer kimenetén, és az $\omega>\omega_{si}$ spektrumú mérési zajokat és zavarásokat a rendszer teljesen elnyomná. A problémát az adja, hogy $M_i(\omega)$ ideális, aluláteresztő szűrőkarakterisztikával a rendszer nem valósítható meg, a folyamat energiatárolásból és holtidőből származó jelkésleltetései ezt elvileg nem teszik lehetővé. Méretezési célkitűzés csupán az ideális eset megközelítése lehet. A zárt rendszer frekvenciafüggvényének ideális (a. ábra) és a realizálható (b. ábra) amplitúdómeneteit az 1. ábrán szemléltetjük.

A realizálható zárt rendszer frekvenciaátviteli tulajdonságait a nyitott hurok $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvénye szabja meg, ezért az 1.b ábrán ezt is feltüntettük. Amikor az ω_p körfrekvencia környezetében $W_0(j\omega_p)\approx -1$ értéket vesz fel, akkor ott $M(\omega_p)=|W_0/(1+W_0)|_{\omega=\omega p}>>1$ érték lehet, vagyis általában az $M(\omega)$ amplitúdómenetnek egy ω_r rezonancia körfrekvencián $M(\omega_r)=\boldsymbol{M_{max}}$ kiemelése (**rezonanciacsúcsa**) van. Ennek értéke szoros kapcsolatban van a zárt rendszer $v_R(t)$ átmeneti függvényének $\boldsymbol{v_{Rmax}}$ maximális értékével. Tapasztalati értékek:

$$M_{max}\geq 1{,}5 \quad\rightarrow\quad v_{Rmax}\leq M_{max}-0{,}1\ ,$$

$$1{,}25\leq M_{max}\leq 1{,}5 \quad\rightarrow\quad v_{Rmax}=M_{max}\ ,$$

$$M_{max}\leq 1{,}25 \quad\rightarrow\quad v_{Rmax}<M_{max}\ .$$



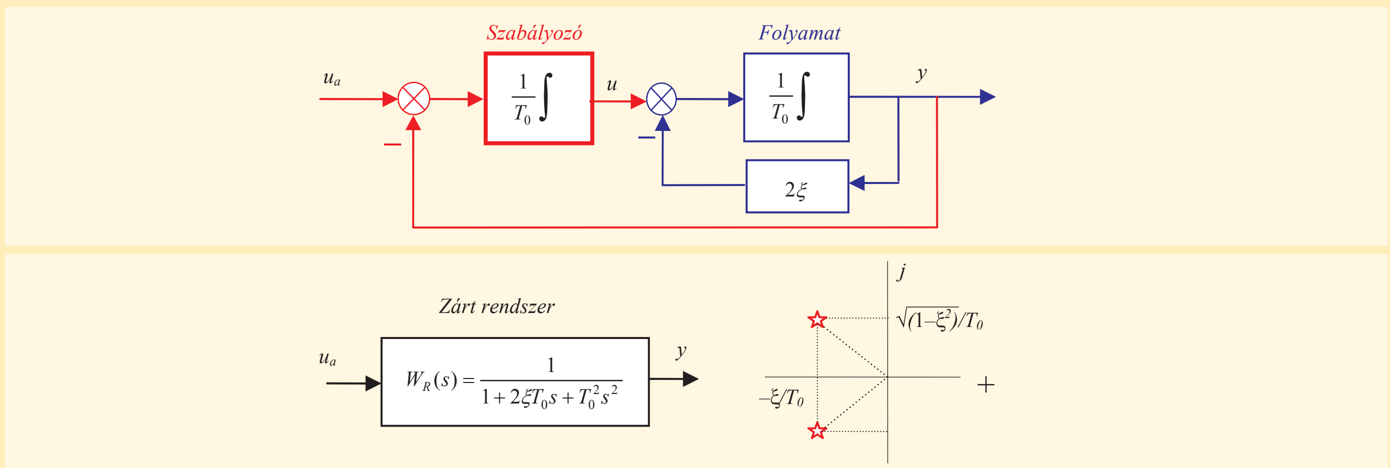
2. ábra Az M = *állandó körök* és a $W_0(j\omega)$ helygörbe

Ha tehát a $v_R(t)$ átmeneti függvényre 25% alatti túllendülést akarunk elérni, akkor a rezonanciacsúcsra $M_{max}<1{,}25$ értéket kell betartani. Miután az $M(\omega)$ függvényt a nyitott kör $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvénye, a $W_0(j\omega)$-*t* pedig a szabályozó és a folyamat $W_c(j\omega)$ és $W_p(j\omega)$ frekvenciafüggvényei befolyásolják, a zárt rendszer túllendülésre vonatkozó tervezése visszavezethető a nyitott kör frekvenciamenetének a szabályozó $W_c(j\omega)$ frekvenciafüggvényével történő, megfelelő alakítására. A tervezés elve jól szemléltethető a nyitott kör *Nyquist*-helygörbéjének a komplex síkon történő ábrázolásával, ahol most az ún. *M*-görbéket is feltüntetjük. Legyen a valós tengely változója x, a képzetes tengelyé y, és ennek megfelelően $W_0(j\omega)=realW_0(j\omega)+j\ imagW_0(j\omega)=x+jy$. Ezzel:

$$W_R=\frac{x+jy}{1+x+jy}=Me^{j\alpha}\Rightarrow$$

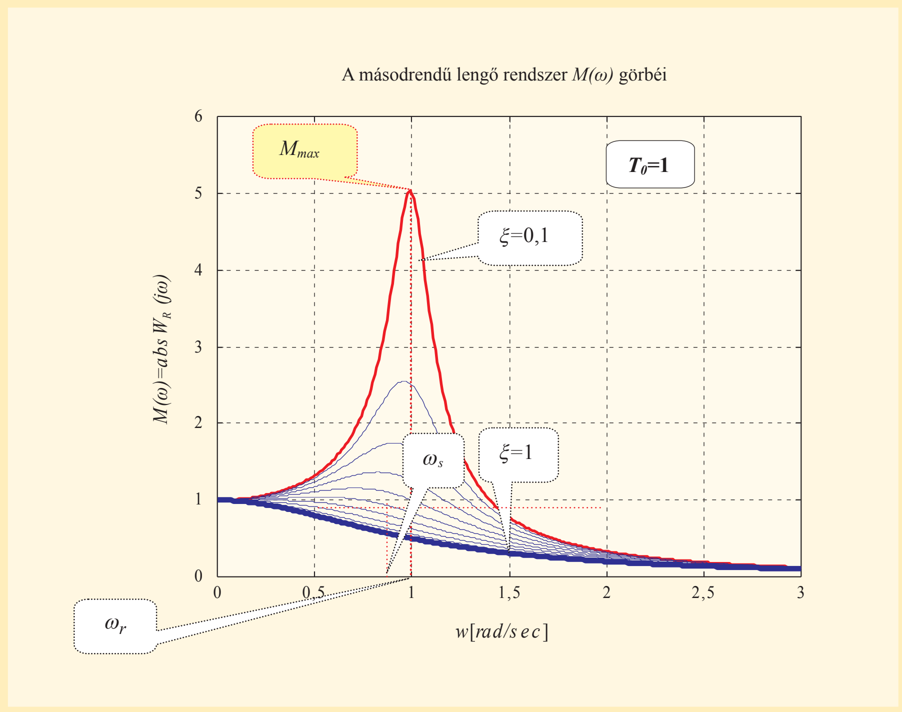
$$M=\left|\frac{x+jy}{1+x+jy}\right|=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(1+x)^2+y^2}}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{1+2x+x^2+y^2}}\ .$$

3. ábra *Másodrendű lengőrendszer hatásvázlata és különféle rendszerjellemző függvényei*



$$W_0(j\omega)=\frac{1}{sT_0}\,\frac{\frac{1}{sT_0}}{1+\frac{2\xi}{sT_0}}=\frac{1}{sT_0(sT_0+2\xi)}\quad\Rightarrow\quad W_R(s)=\frac{\frac{1}{sT_0(sT_0+2\xi)}}{1+\frac{1}{sT_0(sT_0+2\xi)}}=\frac{1}{1+2\xi T_0s+T_0^2s^2}$$

$$W_R(j\omega)=M(\omega)e^{j\alpha(\omega)}\quad\Rightarrow\quad M(\omega)=\frac{1}{\sqrt{[1-(\omega T_0)^2]^2+4\xi^2T_0^2\omega^2}}\qquad \alpha(\omega)=-arctg\frac{2\xi T_0\omega}{1-(T_0\omega)^2}$$



4. ábra Domináns póluspárral rendelkező rendszer $M(\omega)$ görbéi

Az $M(\omega)$ függvénynek M_{max} kiemelése és ω_r rezonancia körfrekvenciája akkor van, ha a $W_0(j\omega)$ helygörbe az $M>1$ paraméterhez tartozó valamely kört érintve halad az origó felé. A 2. ábra olyan nyitott kör *Nyquist*-diagramját tartalmazza, amelynél a $W_0(j\omega)$ az $M=1{,}25$ paraméterhez tartozó kört érinti, vagyis a zárt rendszer átmeneti függvényének maximuma $v_{Rmax}\le 1{,}25$ értékre várható. Ha $v_{Rmax}<1{,}25$ méretezési követelmény, akkor a $W_0(j\omega)$ nem léphet be az $M=1{,}25$ paraméterhez tartozó kör tartományába[7].

A realizálható zárt rendszer sávszélességének azt az ω_s körfrekvenciát tekintjük, amely körfrekvenciánál az $M(\omega_s)$ érték az $M(0)/\sqrt{2}$ értékre csökken. A nagy sávszélesség a rendszer gyors működését jelentheti, ezért a tervezés során ezt figyelembe kell venni. Ha a zárt rendszer $W_R(s)$ átviteli függvénye egy ún. domináns póluspárral rendelkezik, akkor az $M(\omega)$, M_{max}, $\alpha(\omega)$, $v_R(t)$ és v_{Rmax} analitikusan is számítható.

Az azonos M értékekhez tartozó pontok mértani helyének egyenlete ebből az $x-y$ síkon:

$$\left(x-\frac{M^2}{1-M^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{M}{1-M^2}\right)^2=R_M^2 \quad .$$

Rögzített M esetében ez egy $x_0=M^2/(1-M^2)$, $y_0=0$ középpontú, $R_M=|M/(1-M^2)|$ sugarú kör egyenlete, amely $M=1$ esetén elfajul, és az $x=-1/2$ egyenesre egyszerűsödik. Ezek a körök a zárt rendszer ún. ***M*-görbéi**.

Megjegyzés

Az M-görbékhez hasonlóan meghatározhatók az $x-y$ sík $\alpha(\omega)=arcW_R(j\omega)=állandó$ értékeihez tartozó ún. **α-görbék** is, amelyeknek egyenlete:

$$\alpha(\omega)=arcW_R(j\omega)=arctg\frac{y}{x}-arctg\frac{y}{1+x}=$$

$$=arctg\frac{\frac{y}{x}-\frac{y}{1+x}}{1+\frac{y}{x}\frac{y}{1+x}}=arctg\frac{y}{x^2+x+y^2}$$

$$tg\alpha=\frac{y}{x^2+x+y^2} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2tg\alpha}\right)^2=\frac{1+tg^2\alpha}{4tg^2\alpha}=R_\alpha^2 \quad .$$

Ez $tg\alpha=állandó$ mellett szintén egy körsereget meghatározó kifejezés, ahol az R_α sugarú körök (x_0, y_0) középpontjainak $[-1/2,\ 1/(2tg\alpha)]$ koordinátái az $x=-1/2$ egyenesen vannak[6].

[6] Az α-görbék felhasználásának kérdéseit jelen munkában nem tárgyaljuk, ezért részletezésükre sem kerül sor.

Példa

Egy másodrendű rendszer hatásvázlata, nyitott és zárt körének átviteli függvényei, a zárt rendszer domináns póluspárja, valamint $M(\omega)$ függvénye a 3. ábrán látható ($T_0=1$, $0<\xi<1$).

Az $M(\omega)$ szélsőértéke $dM(\omega)/d\omega=0$ egyenletből $\omega_r=(1-2\xi^2)^{1/2}/T_0$ helyen van (szélsőérték akkor létezhet, ha $0<\xi<1/\sqrt{2}$), értéke $\mathbf{M_{max}=1/[2\xi(1-\xi^2)^{1/2}]}$. Az $M(\omega_s)=1/\sqrt{2}$ egyenletből a zárt rendszer sávszélessége $\omega_s=[(1-2\xi^2)+(4\xi^4-4\xi^2+2)^{1/2}]^{1/2}/T_0$. A $v_R(t)$ átmeneti függvény maximális értékét már korábban meghatároztuk: $\mathbf{v_{Rmax}=1+exp[-\pi\xi/\sqrt{(1-\xi^2)}]}$. Vegyük észre, hogy M_{max} és v_{Rmax} kizárólag a másodrendű rendszer ξ csillapítási tényezőjének a függvénye. A rendszer $M(\omega)$ görbéit a ξ csillapítási tényező különböző értékei mellett a 4. ábra tartalmazza.

A zárt rendszer frekvenciafüggvényére alapozott tervezés nehézkes eljáráshoz vezet, ezért a gyakorlati megoldásokban a problémát visszavezetjük **a nyitott kör frekvenciafüggvénye alapján történő tervezésre**. Erre az elvi lehetőséget az teremti meg, hogy a $W_R(j\omega)$ és a $W_0(j\omega)$ között egyértelmű függvénykapcsolat van: $W_R=W_0/(1+W_0)$.

Ez az elv azt jelenti, hogy a $W_0(j\omega)=W_c(j\omega)W_p(j\omega)$ nyitott köri frekvenciafüggvényt a szabályozó $W_c(j\omega)$ frekvenciafüggvényével úgy alakítjuk, hogy a zárt rendszerre vonatkozó minőségi követelmények kielégítését megvalósíthassuk. Arra való támpontot, hogy az $a_0(\omega)=absW_0(j\omega)$ alakítására a szabályozó $W_c(j\omega)$ frekvenciafüggvénye miként használható fel, a *Bode*-diagramok adnak.

(Folytatjuk!)

szbela12@gmail.com, fjuhaszne@gmail.com

[7] Az $M=\infty$ paraméterhez tartozó kör „rázsugorodik” a komplex sík valós tengelyének $-1+j0$ pontjára, és ha $W_0(j\omega)$ ezen a ponton átmenne, akkor $M_{max}=\infty$ értéket venne fel (ez a nem megengedhető stabilitási határhelyzet).