Szabályozástechnika 26.

A szabályozás rendszertechnikai méretezése – 5.

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencné

A folyamat $W_p(s)=G_p(s)/H_p(s)$ polinomok hányadosaként felírható átviteli függvényének számlálója és nevezője elvileg tartalmazhat pozitív valós részű gyököket (nem minimum fázisú labilis szabályozott szakaszok). Ezek a „labilis zérusok" és labilitást eredményező pólusok a soros kompenzáció tervezésében nehézségeket támasztanak. Az itt jelentkező problémákat - mellőzve az általános rendszerelméleti tárgyalást - példákon történő illusztrációk keretei között mutatjuk be. Az általános következtetés az, hogy a pozitív valós részű zérusok, illetve a folyamat labilis pólusai a soros kompenzációs szabályozóval nem közömbösíthetők.

Labilis és nem minimumfázisú folyamatok soros kompenzációja

A szabályozott folyamat – szerencsére nem sok gyakorlati esetben – labilis, vagy nem minimumfázisú tulajdonsággal is rendelkezhet. Ez azt jelenti, hogy a $W_p(s)=G_p(s)/H_p(s)$ átviteli függvénynek a számlálója és a nevezője tartalmazhat *pozitív valósrészű gyököket*. Az igazi veszélyforrást a $H_p(s)$ nevező pozitív valósrészű gyökei (a folyamat *labilitását okozó pólusai*) jelentik, mivel ekkor a labilis folyamathoz tervezett szabályozónak olyannak kell lennie, ami a zárt rendszernek – a hurokban lévő labilis folyamat ellenére – a stabilitását is biztosítja. Az itt jelentkező tervezési problémákat példák bemutatásával illusztráljuk, és ezekhez felhasználjuk a szabályozási rendszer *gyökhelygörbéjének*[1] a fogalmát.

A szabályozási rendszer gyökhelygörbéje

A **nyitott** kör $W_0(s)=W_c(s)W_p(s)=G_0(s)/H_0(s)$ átviteli függvényének ismeretében a **zárt** kör karakterisztikus egyenlete $H_0(s)+G_0(s)=0$. A holtidő nélküli nyitott kör eredő átviteli függvényének gyöktényezős és időállandós normálalakja:

$$W_0(s)=\frac{G_0(s)}{H_0(s)}=k_0\frac{\prod_{k=1}^{m}(s-z_k)}{\prod_{k=1}^{n}(s-p_k)}=k\frac{\prod_{l=1}^{m_1}(1+s\tau_l)\prod_{l=1}^{m_2}(1+2\mu_l\tau_{0l}s+\tau_{0l}^2s^2)}{s^i\prod_{l=1}^{n_1}(1+sT_l)\prod_{l=1}^{n_2}(1+2\xi_lT_{0l}s+T_{0l}^2s^2)}$$

$$m_1+2m_2=m,\quad i+n_1+2n_2=n\quad n\geq m$$

Ebben z_k a $W_0(s)$ zérusai, p_k a $W_0(s)$ pólusai, $i\geq 0$ a rendszer típusszáma, k_0 a huroktényező, k a hurokerősítés. Ez a kifejezés tartalmazza a folyamat és a szabályozó minden zérusát és pólusát. A zárt rendszer stabilitásának szempontjából mértékadó karakterisztikus polinom:

$$\begin{aligned}H_0(s)+G_0(s)&=\prod_{k=1}^{n}(s-p_k)+k_0\prod_{k=1}^{m}(s-z_k)=\\&=s^i\prod_{l=1}^{n_1}(1+sT_l)\prod_{l=1}^{n_2}(1+2\xi_lT_{0l}s+T_{0l}^2s^2)+\\&+k\prod_{l=1}^{m_1}(1+s\tau_l)\prod_{l=1}^{m_2}(1+2\mu_l\tau_{0l}s+\tau_{0l}^2s^2)\end{aligned}$$

Ennek gyökei (a zárt rendszer $W_R(s)=W_0(s)/[1+W_0(s)]$ átviteli függvényének n számú p_{Rk} pólusai) természetesen nem lehetnek azonosak (a $k_0=0$ és $k_0=\infty$ eseteket kivéve[2]) a nyitott kör $W_0(s)$ átviteli függvényének p_k pólusaival vagy z_k zérusaival. Fontos kérdés, hogy a nyitott kör adott k_0, z_k, p_k paramétereinél milyen p_{Rk} gyökeloszlást mutat a zárt kör karakterisztikus egyenlete, miközben a k_0 paraméter egy adott intervallumot befut[3]. Ebben a k_0 paraméterben fontos tényező a szabályozó k_c erősítése. *A p_{Rk} gyökök komplex síkon történő vándorlásának mértani helye – miközben a k_0 paraméter befutja a $0<k_0<\infty$ intervallumot – a szabályozási rendszer gyökhelygörbéje.* Miután a zárt rendszer aszimptotikus stabilitása a szabályozás alapkövetelménye, nyilvánvaló, hogy k_0 azon értékei, amelyeknél a gyökhelygörbe a komplex sík pozitív valós részére (a labilis félsíkra) esik, nem megengedett értékek. Vegyük észre, hogy $k_0=0$ esetén $p_{Rk}=p_k$ és $k_0=\infty$ értéknél $p_{Rk}=z_k$ vagy $p_{Rk}=\infty$. Ez azt jelenti, hogy a zárt rendszer p_{Rk} pólusainak vándorlásai (miközben a k_0 befutja a $0<k_0<\infty$ intervallumot) a nyitott kör p_k pólusaiból indulnak és a nyitott kör zérusaiba vagy a végtelenbe tartanak. A p_{Rk} gyökök (a zárt rendszer pólusainak) száma azonos a nyitott kör p_k pólusainak n számával, amiből az is következik, hogy a gyökhelygörbének n ága van[4]. Ha minden ág a komplex számsík negatív valósrészű félsíkján van, miközben a k_0 befutja a teljes tartományát, a zárt szabályozás *strukturálisan stabilis*. Illusztrációként egy negyedrendű rendszer gyökhelygörbéjének ábráját mutatjuk be. Legyen a stabilis (önbeálló) nyitott kör átviteli függvénye ($\tau=1/4$, $T_1=1$, $T_2=1/2$, $T_3=1/3$ adatokkal):

$$\begin{aligned}W_0(s)&=k\frac{1+s\tau}{(1+sT_1)^2(1+sT_2)(1+sT_3)}=\\&=k\frac{\tau}{T_1^2T_2T_3}\frac{s+\frac{1}{\tau}}{(s+\frac{1}{T_1})^2(s+\frac{1}{T_2})(s+\frac{1}{T_3})}=k\frac{3}{2}\frac{s+4}{(s+1)^2(s+2)(s+3)}\end{aligned}$$

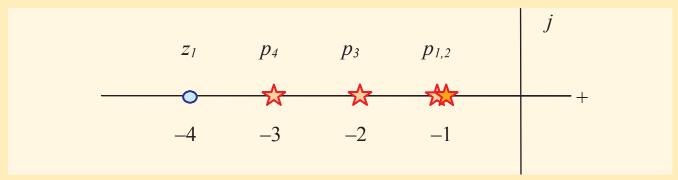
---

[1] Irodalom: *Evans, W. R.*: Control System Synthesis by Root Locus Method. Trans. AIEE.69., 1950.

[2] $k_0=0$ esetében: $H_0(s)+G_0(s=H_0(s)=\prod(s-p_k)=0$ és $p_k=p_{Rk}$. $k_0=\infty$ esetében: $\prod(s-p_k)+k_0\prod(s-z_k)=0\rightarrow(1/k_0)\prod(s-p_k)+\prod(s-z_k)=\prod(s-z_k)=0$, továbbá $z_k=p_{Rk}$.

[3] A k_0 paraméter helyett más paraméterekre is lehet gyökhelygörbét készíteni.

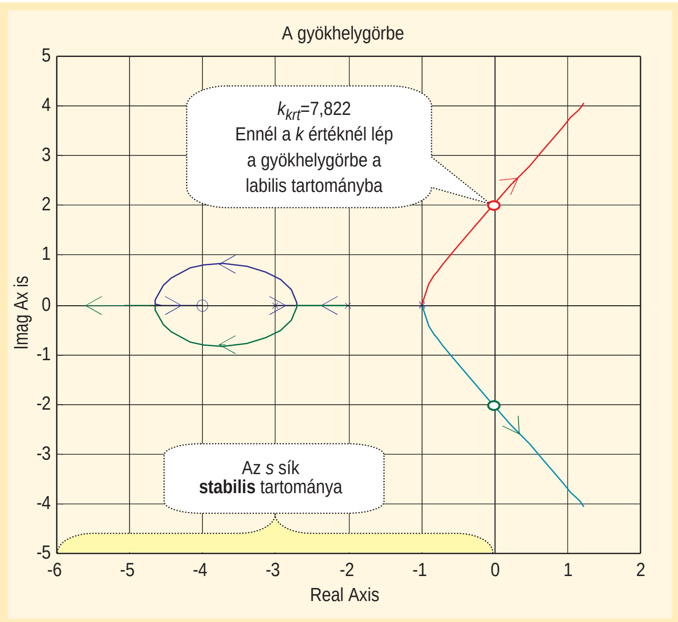
[4] Az *Evans* által bevezetett gyökhelygörbe-módszer kb. tíz szabályra építve segíti a gyökhelygörbe ábrázolását. Erre a módszerre tervezési eljárásokat alakítottak ki, amelyek lényege, hogy a nyitott kör átviteli függvényébe zérusokat „beépítve" a zárt rendszer pólusaira befolyást lehet gyakorolni (a **PIPD**-szabályozó pl. két zérussal és két pólussal bővíti a nyitott kör átviteli függvényét). A zérusok beiktatása sajnos együtt jár a velük azonos számú pólus szükségszerű beiktatásával is, ami a realizálás velejárója. A gyökhelygörbe ábrázolására a mai technikai lehetőségek mellett már nem *Evans* szabályrendszerét használjuk, hanem számítástechnikai szolgáltatások igénybevételével a karakterisztikus egyenletet k_0 különféle értékeire megoldjuk. Pl. **MATLAB**-támogatás: `pRk=rlocus(G0,H0,k0);`



1. ábra $W_0(s)$ átviteli függvény (stabilis nyitott kör) pólus – zérus eloszlása

A nyitott kör zérusa z_1=–4 és pólusai p_1=–1, p_2=–1, p_3=–2, p_4=–3. A $W_0(s)$ pólus – zérus eloszlása a 1. ábrán található.

A $W_R(s)=W_0(s)/[1+W_0(s)]$ átviteli függvényű, zárt szabályozási rendszer p_{Rk} pólusai a komplex számsíkon – miközben a k paraméter a $0<k<k_{max}$ intervallumban változik – a rendszer gyökhelygörbéjének mentén találhatók (2. ábra). Magát a görbét **MATLAB**-támogatással ábrázoltuk.



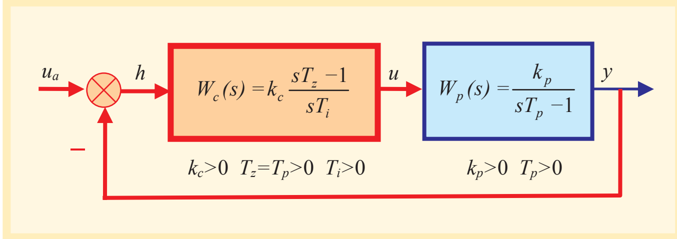
2. ábra A zárt rendszer gyökhelygörbéje (p_{Rk} pólusok)

Láthatjuk, hogy a gyökhelygörbe a nyitott kör átviteli függvényének –1, –1, –2 és –3 pólusaiból indul, egy ága a nyitott kör –4 zérusába, három ága a végtelenbe tart. A k_{krt} kritikus erősítésnél két ága – metszve az imaginárius tengelyt – a komplex sík labilis tartományába lép, és $k>k_{krt}$ értékeknél a zárt rendszer is labilissá válik[5]. A gyökhelygörbékre vonatkozó további ábrázolásokat példák során mutatjuk be.

Labilis folyamat szabályozása

Tételezzük fel a 3. ábra szerinti *labilis folyamatot* a hozzá illesztett, póluskiejtést megvalósító szabályozó átviteli függvényével.

A folyamat labilitását a $p=1/T_p>0$ pozitív pólus okozza. Ha a $W_c(s)$ átviteli függvényű szabályozó számlálójába egy $z=1/T_z>0$ zérust helyeznénk, akkor $T_z=T_p$ választással a rendszer nyitott köri átviteli függvényében egy zérus – pólus kiejtés valósulhatna meg, ami azt a *hamis illúziót* kelti, mintha a folyamat labilis pólusát eltüntettük volna[6]. A folyamat labilis



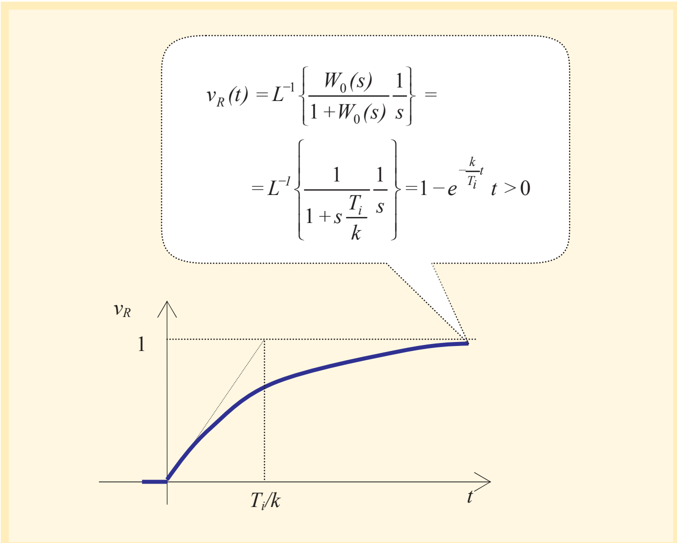
3. ábra Labilis folyamat soros kompenzációs szabályozási rendszerének hatásvázlata

pólusának és a szabályozó zérusának azonossága esetén a nyitott és a zárt rendszer eredő átviteli függvényei a

$$W_0(s)=W_c(s)W_p(s)=k_c\frac{sT_z-1}{sT_i}\bigg|_{T_z=T_p}\frac{k_p}{sT_p-1}=\frac{k_ck_p}{sT_i}=\frac{k}{sT_i}$$

$$W_R(s)=\frac{\dfrac{k}{sT_i}}{1+\dfrac{k}{sT_i}}=\frac{k}{k+sT_i}=\frac{1}{1+s\dfrac{T_i}{k}}$$

kifejezések lehetnének. Ez egy igen kedvező alak, mivel a *nyitott kört integráló tag*, a zárt kört pedig egytárolós, egységnyi átviteli tényezőjű *arányos tag* írná le. A zárt rendszer eredő átmeneti függvénye ekkor a 4. ábrán látható módon alakulna:



4. ábra A zárt rendszer látszólagos átmeneti függvénye

Valóságban a $T_z=T_p$ azonossága nem valósítható meg elsősorban azért, mert a folyamat T_p időállandója munkapontfüggő. Ha értéke $T_p+\Delta T_p$ szerint megváltozik – miközben $T_z=T_p$ az eredeti értékén marad – a tényleges viszonyokat a

$$W_0(s)=W_c(s)W_p(s)=\frac{G_0(s)}{H_0(s)}=k_c\frac{1-sT_p}{sT_i}\frac{k_p}{1-s(T_p+\Delta T_p)}=$$

$$=\frac{k}{sT_i}\frac{1-sT_p}{1-sT_p^*}\qquad T_p^*=T_p+\Delta T_p$$

$$W_R(s)=\frac{G_R(s)}{H_R(s)}=\frac{\dfrac{k}{sT_i}\dfrac{1-sT_p}{1-sT_p^*}}{1+\dfrac{k}{sT_i}\dfrac{1-sT_p}{1-sT_p^*}}=\frac{k(1-sT_p)}{sT_i(1-sT_p^*)+k(1-sT_p)}=$$

$$=\frac{k(1-sT_p)}{-s^2T_iT_p^*+s(T_i-kT_p)+k}$$

---

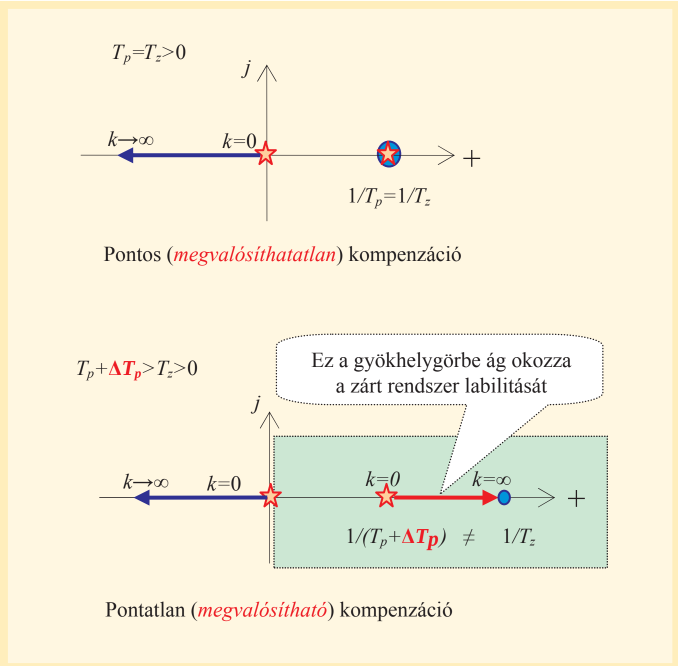
[5] Ha a folyamat holtidő típusú késleltetést is tartalmaz, a karakterisztikus egyenlet transzcendens, végtelenül sok gyöke van. A gyökhelygörbének ekkor végtelenül sok ága van, és az Evans szabályrendszere is több pontban érvényét veszti. Mindezek miatt az ilyen esetekre vonatkozó alkalmazás – bár az irodalom ezt az esetet is részletesen tárgyalja – igencsak körülményes. Irodalom: Benjamin C. Kuo Önműködő szabályozó rendszerek. Műszaki Könyvkiadó.

[6] A szabályozó $W_c(s)$ átviteli függvénye a formális hasonlóság ellenére most nem **PI**-szabályozó. Bár ennek is **P**-és **I**-csatornája van, de kimenőjelét nem a két csatorna jelének az összege, hanem a *különbsége* hozza létre.

átviteli függvények jellemzik. A soros kompenzáció most nem ejti ki a folyamat labilis pólusát, és ezért a $H_R(s)=0$ karakterisztikus egyenletnek bizonyosan marad labilitást okozó $p_R>0$ pólusa. A zárt rendszer karakterisztikus egyenlete ekkor:

$$H_0(s)+G_0(s)=sT_i(1-sT_p^*)+k(1-sT_p)=-s^2T_iT_p^*+s(T_i-kT_p)+k=0$$

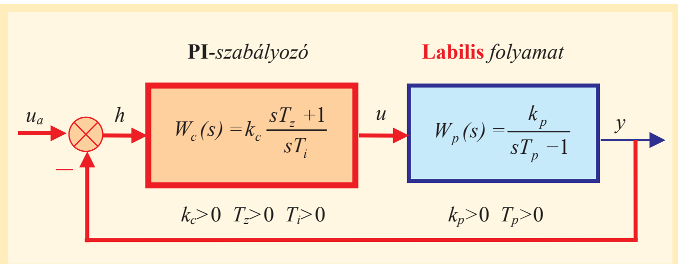
A rendszer gyökhelygörbéjét a 5. ábrán láthatjuk. Az a. ábra a matematikai értelemben vett ideális (de nem megvalósítható) esetet mutatja, amikor is a pólus–zérus kiejtés egzakt módon megvalósul. Mivel ez a gyakorlatban nem létezhet, a valóságos viszonyokat a b. ábrán mutatjuk be. Láthatóan egy gyökhelygörbe ág a $\Delta T_p\neq 0$ miatt mindenképen marad az s sík labilis tartományában, ami a zárt rendszer labilitását idézi elő.



5. ábra Labilis folyamat soros kompenzációjának gyökhelygörbéje

A példa tanulsága szerint a folyamat labilis pólusát a szabályozó pozitív valósrészű („labilis") zérusával nem szabad kiejteni, az ilyen soros kompenzációt nem szabad megvalósítani! **A *labilis pólus pozitív valósrészű zérussal* történő kompenzálásának tilalma általános érvényű szabály**.

Az adott labilis folyamat szabályozását megvalósítható soros kompenzációt a 6. ábrán láthatjuk.



6. ábra Labilis folyamat soros kompenzációjának hatásvázlata

Most nem kompenzáltuk a folyamat labilis pólusát, de az adott **PI**-szabályozó alkalmazásával egy $-1/T_z$ negatív valósrészű („stabilis") zérust[7] iktattunk a nyitott körbe. A nyitott és a zárt kör átviteli függvényei és a zárt kör karakterisztikus egyenlete ezekkel a paraméterekkel:

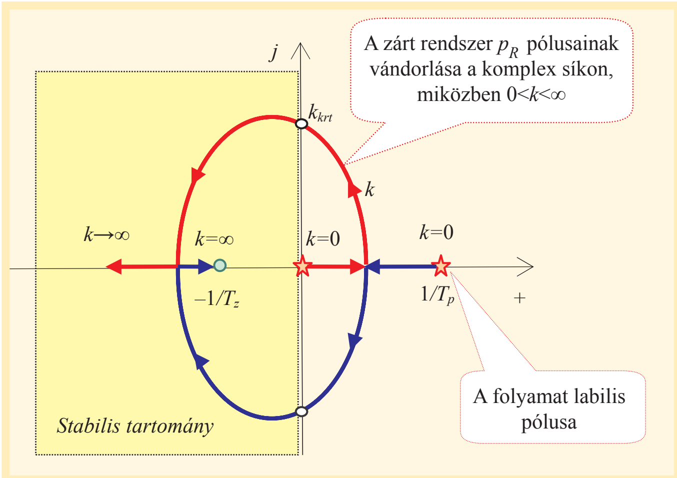
$$W_0(s)=W_c(s)W_p(s)=k_c\frac{1+sT_z}{sT_i}\frac{k_p}{sT_p-1}=\frac{k}{sT_i}\frac{1+sT_z}{sT_p-1}\qquad k=k_ck_p$$

$$W_R(s)=\frac{\frac{k}{sT_i}\frac{1+sT_z}{sT_p-1}}{1+\frac{k}{sT_i}\frac{1+sT_z}{sT_p-1}}=\frac{k(1+sT_z)}{sT_i(sT_p-1)+k(1+sT_z)}=\frac{k(1+sT_z)}{s^2T_iT_p+s(kT_z-T_i)+k}=$$

$$=\frac{1+sT_z}{1+\frac{kT_z-T_i}{k}s+\frac{T_iT_p}{k}s^2}=\frac{1+sT_z}{1+2\xi Ts+T^2s^2}\qquad T=\sqrt{\frac{T_iT_p}{k}}\qquad \xi=\frac{kT_z-T_i}{2\sqrt{kT_iT_p}}$$

$$s^2T_iT_p+s(kT_z-T_i)+k=0$$

A karakterisztikus egyenletből kiolvashatóan $kT_z>T_i$ esetén a másodfokú egyenlet minden együtthatója azonos előjelű, ezért ekkor a zárt rendszer p_R pólusai az s sík stabilis tartományában vannak. A rendszer gyökhelygörbéje a 7. ábrán látható.

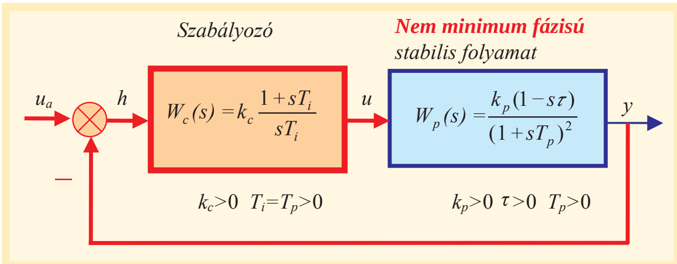


7. ábra Labilis pólust tartalmazó szabályozás gyökhelygörbéje

Fontos észrevennünk, hogy a **labilis folyamat** esetében a körerősítés **növelésével** ($k>k_{krt}$) a zárt szabályozási rendszer[8] **stabilizálható**.

Nem minimumfázisú folyamat szabályozása

Egy nem minimumfázisú folyamatot tartalmazó rendszer hatásvázlata a 8. ábrán látható:



8. ábra Nem minimumfázisú folyamat soros kompenzációja

A folyamat átviteli függvényében egy $z_1=1/\tau>0$ értékű ún. „labilis zérus" van. A folyamat „labilis zérusát" most sem kompenzáltuk a szabályozó egy labilis pólusával, mivel ez egyrészt labilis szabályozót eredményezne, másrészt hatása hasonló lenne az előző példában tárgyalt jelenséggel (elvileg nem lehet-

[7] „Stabilis zérus" az átviteli függvény számlálójának olyan gyöke, amely a komplex számsík negatív valós részű félsíkján van.

[8] Stabilis folyamatok szabályozásakor a *körerősítés növelése* a rendszer stabilitási tartalékának csökkenését eredményezi, és végső soron *gerjedéshez* vezethet. Ezzel ellentétesen, a labilis folyamatoknál a *körerősítés növelésével stabilizálható* a zárt rendszer.

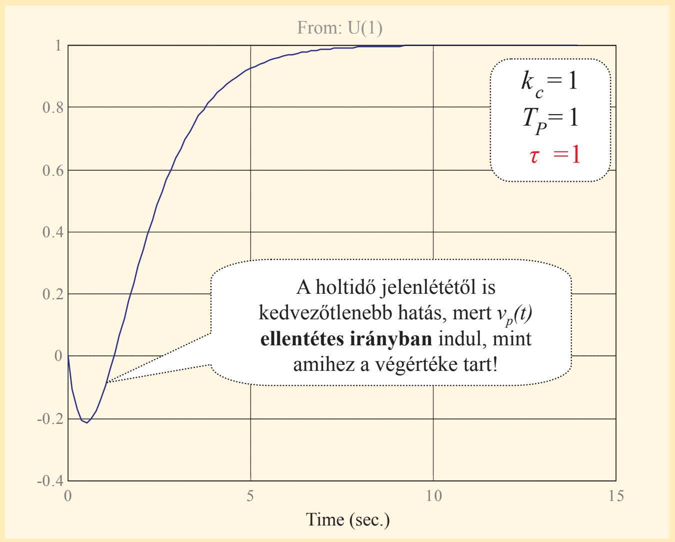
séges egzakt zérus – pólus kiejtés, de most a folyamat zérusa munkapontfüggő paraméter). Az önbeálló (T_p>0), nem minimumfázisú (τ>0) folyamat átviteli és átmeneti függvényei:

$$W_p(s) = k_p \frac{1-s\tau}{(1+sT_p)^2} \qquad k_p > 0 \quad T_p > 0 \quad \tau > 0$$

$$v_p(t) = L^{-1}\left\{k_p \frac{1-s\tau}{(1+sT_p)^2}\frac{1}{s}\right\} = k_p L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{T_p}} - \frac{T_p+\tau}{T_p^2}\frac{1}{(s+\frac{1}{T_p})^2}\right\} =$$

$$= k_p(1-e^{-\frac{t}{T_p}} - \frac{T_p+\tau}{T_p^2} t e^{-\frac{t}{T_p}}) = k_p(1-\frac{T_p^2+(T_p+\tau)t}{T_p^2} e^{-\frac{t}{T_p}})$$

Az átmeneti függvény grafikonja a 9. ábrán látható. Ennek sajátossága, hogy a $t\approx 0$ környezetében $v_p(t)$ ellentétesen indul, mint amihez a $v_p(\infty)=1$ végértéket tekintve tart. Ez a „labilis zérus”[9] ugyan a folyamatban stabilitási problémát nem okoz, de a zárt kör működését természetesen alapvetően érintheti.



9. ábra Pozitív zérus hatása a folyamat $v_p(t)$ átmeneti függvényére

[9] A $W(s)=G(s)/H(s)$ átviteli függvényű tag „labilis zérusa” széleskörűen használt – nem túl szerencsés – elnevezés, és arra utal, hogy a $G(s)=0$ egyenletnek a komplex számsík pozitív valósrészű (labilis) félsíkján van gyöke, ami az átviteli függvény zérusa. A $W(s)$ átviteli függvényű tag stabilitáshoz azonban a $G(s)=0$ gyökeinek ($W(s)$ zérusainak) nincs semmi köze.

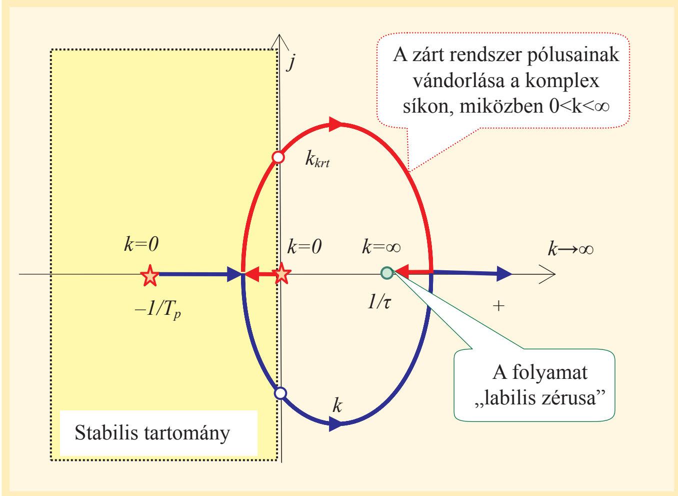
A nyitott kör átviteli függvénye, a zárt kör karakterisztikus egyenlete és gyökhelygörbéje a 10. ábrán látható.

$$W_0(s) = \frac{G_0(s)}{H_0(s)} = \frac{k_c k_p(1+sT_i)(1-s\tau)}{sT_i(1+sT_p)^2} =$$

$$= \frac{k(1-s\tau)}{sT_p(1+sT_p)} \qquad k = k_c k_p \quad T_i = T_p$$

$$H_0(s)+G_0(s) = sT_p(1+sT_p)+k(1-s\tau) =$$

$$= s^2T_p^2 + s(T_p - k\tau) + k = 0$$



10. ábra „Labilis zérust” tartalmazó szabályozás gyökhelygörbéje

A paraméterek nem egzakt volta miatt a folyamat pozitív zérusait sem szabad a szabályozó pólusaival kompenzálni. Figyeljük meg, hogy az adott stabilis folyamat esetében a körerősítés növelésével a visszacsatolt zárt szabályozási rendszer labilissá válhat (lásd a rendszer gyökhelygörbéjét!). A rendszer k_{krt} kritikus körerősítésének meghatározását az olvasóra bízzuk.

Elvileg a folyamat átviteli függvényében a pozitív valós részű zérus és a labilis pólus egyszerre is jelen lehet. Az ilyen folyamatok soros kompenzációval rendszerint nem szabályozhatók.

(Folytatjuk!)

szbela12@gmail.com, fjuhaszne@gmail.com