

# Szabályozástechnika – 19.

## Az elmélet egy alkalmazása

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencné

**A PI szabályozót tartalmazó villamos hajtás szabályozási rendszer analizisének folytatásaként – a zárt rendszer állapotegyenletére alapozva – tárgyaljuk a dinamikus rendszer tranziens folyamatait. Közre-adunk egy olyan MATLAB programot, amely vizsgálja a rendszer stabilitását és adott determinisztikus gerjesztőjelekre megoldja a zárt szabályozási rendszer állapotegyenleteit.**

### MATLAB-program az állapot-tér módszerre alapozott analízishez

A következő MATLAB-program – az adott gerjesztőjelek mellett – alkalmas a rendszer állapotegyenletének a megoldására<sup>1</sup>. A program bekéri a rendszer paramétermátrixainak számértékeit ( $k_p, k_z, T_m, T_v, R, c\Phi, \mu, A_E, k_c, T_p$  input-utasítások), és ezek birtokában meghatározza az  $A_R, B_R, C_R$  és  $D_R$  paramétermátrixokat. Az  $A_R$  ismeretében kiszámítja a rendszer állapotmátrixának  $\lambda_{Ri}$  sajátértékeit (**eig**), majd felveszi és ábrázolja az  $u_a(t)=10(1-e^{-t/20})\mathbf{1}(t)$  alapjel és az  $m_T(t)=m_{Tn}\mathbf{1}(t-100)=50*\mathbf{1}(t-100)$  zavarójel időfüggvényeket (**plot**). Ezt követően az adott gerjesztésekre vonatkozó  $x(t), y(t)$  megoldásokat számítja (**lsim**) és a képernyőn ábrázolja (**plot**). Ld. az 1. programrészletet.

#### Megjegyzés

A MATLAB-program szerkezete a következő: **változó=kifejezés** vagy **kifejezés**. Ennek alapján például a prompt után beírt `<<x0=-inv(A)*B*u;` utasítás az előzetesen megadott  $A, B$  és  $u$  mátrixok alapján az  $x_0$  változóba helyezi el az `-inv(A)*B*u` szerinti kiszámított eredményt, vagy a prompt után beírt `<<-inv(A)*B*u;` ugyanezt az eredményt egy **ans**-nevű változóba teszi.

A fenti programban használt MATLAB-függvények:

- `Tm=input('Tm=');` ; a  $T_m$  adat bekérése és az adott  $T_m$ -nevű változóba helyezése,
- `lambdaR=eig(AR);` ; az  $A_R$  mátrix  $\lambda_{Ri}$  sajátértékeinek számítása és a `lambdaR` változóba helyezése,
- `printsys(AR, BR, CR, DR);` ; a rendszer  $A_R, B_R, C_R, D_R$  paramétermátrixainak kiírása,
- `zeros(1, 100);` ; zérus értékeket tartalmazó sorvektor,

1. programrészlet

```
echo on
%=====
% Fordulatszám-szabályozás analízise az
% állapotegyenletek alapján (sorozat1.m fajl)
%=====
% Adatbevitel
R=input('R='); cfi=input('cfi=');
kp=1/cfi; kz=R/(cfi)^2; Tm=input('Tm=');
Tv=input('Tv=');
kc=input('kc='); Ti=input('Ti=');
AE=input('AE='); mü=input('mü=');
%=====
% Analízis az állapotegyenlet alapján
% A rendszer paramétermátrixainak
% számítása
AR=[0 R/(Tm*cfi) 0;...
-(cfi/R+kc*mü*kp*AE*cfi/R)/Tv -1/Tv (mü*kp/Tv)*cfi/R;...
-kc*AE/Ti 0 0];
BR=[0 -kz/Tm; (kc*mü*kp/Tv)*cfi/R 0;...
kc/Ti 0];
CR=[1 0 0; 0 1 0; -kc*mü*AE 0 mü];
DR=[0 0; 0 0; kc*mü 0];
printsys(AR, BR, CR, DR); pause;
%=====
% Stabilitásvizsgálat
lambdaR=eig(AR); disp(lambdaR); pause;
%=====
% A rendszer szimulációja adott
% gerjesztésekre
t=0:1:199;
% A gerjesztőjelek időfüggvényei
u1=10*(1-exp(-t/20));
u2=50*[zeros(1, 100), ones(1, 100)];
grid on;
plot(t, u1, t, u2); grid on;
title('Az u1=ua és az u2=mT gerjesztőjelek'); pause;
% A kimenőjelek számítása és
% ábrázolása
lsim(AR, BR, CR, DR, [u1; u2]', t);
title('Az y1=w, y2=ia, y3=uk kimenő jelek'); pause;
[y, x]=lsim(AR, BR, CR, DR, [u1; u2]', t);
plot(t, y); grid on;
title('A rendszer w, ia, uk kimenő jelei');
xlabel('idő'); ylabel('w, ia, uk'); pause;
%=====
% A követés és a zavarelhárítás
% szemléltetése
plot(t, u1/AE, t, y(:, 1));
title('Az ua alapjel és az yA alapérték');
xlabel('idő'); ylabel('ua, yA'); pause;
%=====
disp('vége');
```

- **ones** (1, 100) ; : egység értékeket tartalmazó sorvektor,
- **plot** (t, u1, t, u2) ; : az  $u_1(t)$  és  $u_2(t)$  időfüggvények kirajzolása a képernyőre,
- **grid on**; : az ábrára rácskészítést helyezze,
- **title** ('Fejlesztés'): az ábra fejlécének megadása, **xlabel** ('idő'): az x koordináta-tengely feliratozása,
- **lsim** (AR, BR, CR, DR, [u1;u2]', t) ; : az  $A_R, B_R, C_R, D_R$  paramétermátrixaival jellemzett rendszer állapotegyenletének  $u_1(t), u_2(t)$  gerjesztésekre vonatkozó  $y(t)$  megoldása a  $0 < t$  időintervallumban és az  $y(t)$  eredmény képernyőn történő ábrázolása,
- **[y, x]=lsim** (AR, BR, CR, DR, [u1;u2]', t) ; : az előzőhöz hasonló, de az eredmény az y, x változóba kerül elhelyezésre,
- **pause**; : a programfutás megállítása (a program „enter” leütéssel folytatható).

A **MATLAB** mátrixorientált nyelv, a skaláris adatokat is  $1 \times 1$  méretű mátrixként kezeli. A mátrix elemeit sorfolytonosan kell megadni, az egyes sorokat egymástól pontosvesszővel (;) kell elválasztani. A soron belüli elemeket egymástól space vagy vessző (,) választhatja el (lásd például a program  $A_R$  mátrixának megadását). A program a sorozat1.m-nevű **MATLAB**-fájlba van elhelyezve. Az **echo on** az echo (visszhang) bekcsolását jelenti, vagyis a programfutás során az utasítások is megjelennek. A %-jelet követő sort a program nem veszi figyelembe, megjegyzések lehetőségére szolgál.

A **MATLAB** behívása után megjelenik a **MATLAB** prompt (<<), ami után a sorozat1 beírását követően a programfutás az „enter” billentyűzésével indítható. A futás első megállása az **R=input** ('R='); helyen van, és R számszerű adatbevitel után „enter” leütéssel folytatható. A teljes program lényeges és meghatározó **MATLAB**-függvényei az **[y, x]=lsim** (AR, BR, CR, DR, [u1;u2]', t); és a **lambda=eig** (AR); utasítások. Az előző az adott gerjesztésekre kiszámítja a rendszer mindhárom kimenőjelét és mindhárom állapotváltozóját, az utóbbi a stabilitás kérdésére ad választ.

A programban szereplő változók neveit igyekeztünk úgy megválasztani, hogy ezek illeszkedjenek a rendszer matematikai modelljében használt jelölésekhez is. Ez alól kivétel a  $c\Phi \rightarrow cfi, \lambda \rightarrow lambda, \mu \rightarrow mü$  változók definiálása, miután a **MATLAB** latin karakterkészletet használ. Maga a program egyébként alkalmas a paramétermátrixok tetszőleges értékeire elvégezni a szabályozás analizisét, hiszen ezeket a paramétereket az érdemi számítások előtt a felhasználótól bekéri. Arra azonban figyelni kell, hogy a bekért adatoknak legyen realitása és fizikai tartalma, mert a program az irreális adatokkal is lefut, és „irreális kérdésekre irreális válaszokat” ad<sup>2</sup>.

Alkalmazkodva az előzőekben tárgyalt folyamat számszerűsített adataihoz, legyen  $k_p=1, k_z=1, T_m=20, T_v=1, R=1, c\Phi=1$ , a teljesítményerősítő jelerősítése  $\mu=10$ , az érzékelőszerv át-

<sup>1</sup> Az állapotegyenlet analitikus megoldásának meghatározása a számítástechnikai szolgáltatások igénybevétele nélkül igen nehézkes és fáradtságos lenne. Jelen munkában a **MATLAB** szolgáltatásainak igénybevitelével oldjuk meg a differenciálegyenleteket. A program tanulmányozása alapján képet kaphatunk a számítógépes szolgáltatás igénybevitelének hasznosságáról.

<sup>2</sup> Mindezek miatt a transziensek minőségi alakulásáról elképzelésekkel kell rendelkez-nünk, és ezeket a programfutás eredményeinek is vissza kell igazolniuk. Ha itt ellentmondás keletkezik, akkor vagy a fizikai működés megítélésében, vagy pedig a matematikai modell-alkotásban, ill. a programozásban hibáztunk.

```

printsys (AR, BR, CR, DR) ; pause ;

a =
           x1           x2           x3
x1         0         0.05000         0
x2       -2.00000       -1.00000       10.00000
x3       -0.02000         0         0
b =
           u1           u2
x1         0       -0.05000
x2       10.00000         0
x3         0.20000         0
c =
           x1           x2           x3
y1         1.00000         0         0
y2         0         1.00000         0
y3       -1.00000         0       10.00000
d =
           u1           u2
y1         0         0
y2         0         0
y3       10.00000         0

lambdaR=eig (AR) ; disp (lambdaR) ; pause ;

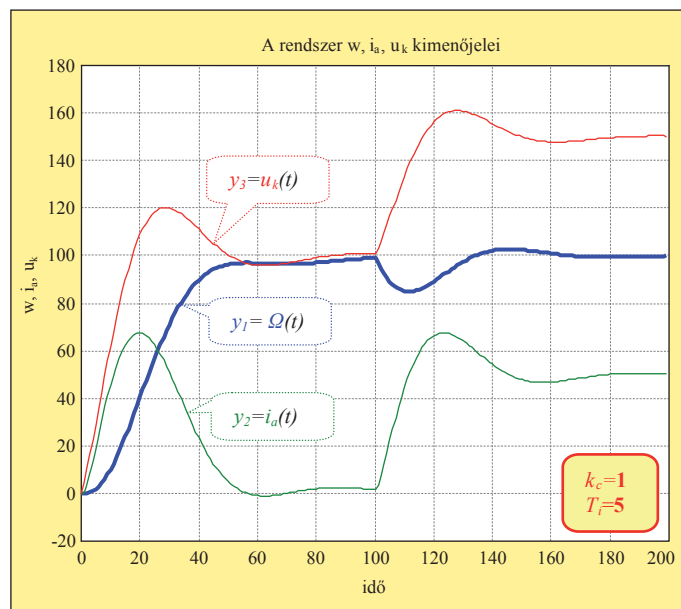
-0.0493 + 0.0931i
-0.0493 - 0.0931i
-0.9014
    
```

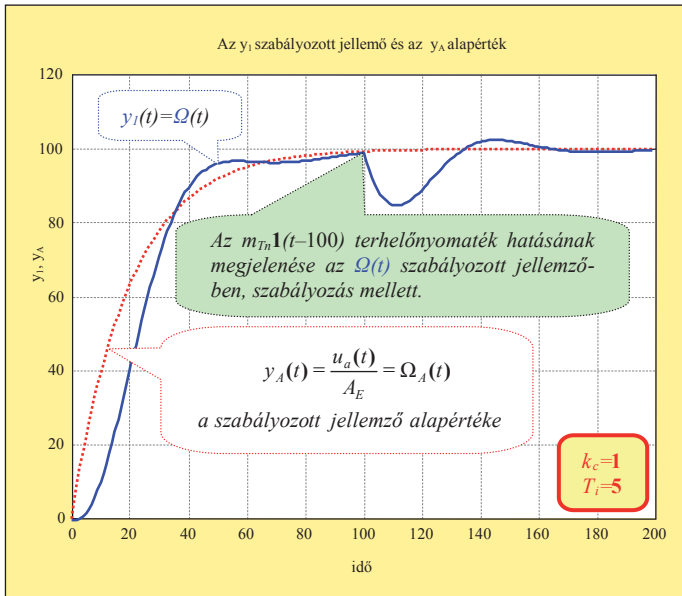
2. programrészlet

viteli tényezője  $A_E=1/10$ . A szabályozó  $k_c$  és  $T_i$  paramétereit – első közelítésben mintegy „találomra” felvéve – szintén meg kell adni, miután a paramétermátrixok kiszámításához a program ezeket az adatokat is bekéri. Első próbálkozásként legyen  $k_c=1, T_i=5$ . Ezekkel a programfutás néhány eredménye a 2. programrészletben olvasható.

A programfutás eredményei tartalmazzák a rendszer paramétermátrixait ( $a=A_R, b=B_R, c=C_R, d=D_R$ ), az  $A_R$  állapotmátrix **negatív valósrésztű**  $\lambda_R$  sajátértékeit (**lambdaR=eig** (AR)), a bemenőjelek grafikonjait (**plot** (t, u1, t, u2)) stb. A képernyőn megjelenő ábrákból kettőt mutatunk be. Az 1. áb-

1. ábra A kimenőjelek időfüggvényei (**plot** (t, y) ;)





2. ábra Az  $\Omega(t)$  szabályozott jellemző és az  $\Omega_A(t)$  alapérték időfüggvényei (plot (t, u1/AE, t, y (:, 1) ; )

rán az adott  $u(t)=[u_1, u_2]^T=[u_a, m_T]^T$  gerjesztés hatására keltett  $y(t)=[y_1, y_2, y_3]^T=[\Omega(t), i_a(t), u_k(t)]^T$  válaszokat láthatjuk. A villamos motor a terhelés bekövetkezésének  $t=100$  időpillanatáig kb. az  $\Omega_A(100)\approx 100$  alapértékét (üresjárás) éri el. A  $t=100$  időpontban ugrásszerűen névleges értékre változó  $u_2$  terhelőnyomaték hatására a szögsebesség csökken (ha nem lenne szabályozás, a szögsebesség a névleges terhelőnyomaték hatására állandósult állapotban kb.  $\Omega=50$  értékre csökkenne le). Ezt követően a szabályozó kompenzációs törekvése érvényre jut, aminek eredményeként a szögsebesség a  $t=200$  időpontra ismét a zavarás előtti alapértékére áll be. A programfutás eredményeiből láthatjuk a tranziens folyamat alatt az  $u_k(t)$  kapcsolófeszültségnek és az  $i_a(t)$  armatúraáramnak az időlefutásait is. A szabályozó a tranziens folyamat végére az  $u_k$  kapcsolófeszültséget  $u_k(200)\approx 150$  értékre növelte, ami gyakorlatilag teljes mértékben kompenzálja a szögsebesség terhelés okozta csökkenését (lásd 1. ábra).

A 2. ábra azt szemlélteti, hogy az  $u_a(t)$  alapjel által képviselt  $\Omega_A(t)=u_a(t)/A_E$  alapértéket a szabályozott jellemző

tényleges  $\Omega(t)$  időfüggvénye – a teljes tranziens folyamat alatt – miként követi. Az  $y(t)$  és az  $y_A(t)$  függvények összehasonlításából szemléletesen látszik, hogy a szabályozás (a szabályozó adott  $k_c=1$  és  $T_i=5$  paramétere mellett) miként tud eleget tenni a követés és az értéktartás követelményeinek. Az ideális esethez képest (ami az  $y(t)$  és az  $y_A(t)$  azonosságát jelentené) az eltérés jelentős mértékű, ami arra inspirálja a tervezőt, hogy más  $k_c, T_i$  szabályozó paramétereket keressen. Erre az állapottermódszer csak igen körülményesen lenne alkalmas, miután  $k_c$  és  $T_i$  különféle próbálgatásos felvételével kellene nagyszámú futtatást végezni, és ezek eredményeinek kiértékelésével az optimális paramétereket megtalálni. Egy ilyen „kísérletsorozat” ugyan előbb-utóbb elvezethetne a  $k_c\approx 12, T_i\approx 19$  „optimálisnak tűnő” paraméterekhez, ez azonban szisztematikus eljárásnak nem tekinthető. Az elméleti megalapozottságra épülő méretezést az állapottermódszer kevéssé támogatja, ezt az **átviteli függvények** felhasználásával végzett analízis (a szabályozó méretezése a **frekvenciamódszer** alapján) teszi lehetővé. Az értéktartási és követési tulajdonságokat – az  $\Omega_A(t)$  alapérték és az  $\Omega(t)$  tényleges értékek összevetésével – a 2. ábra szemlélteti.

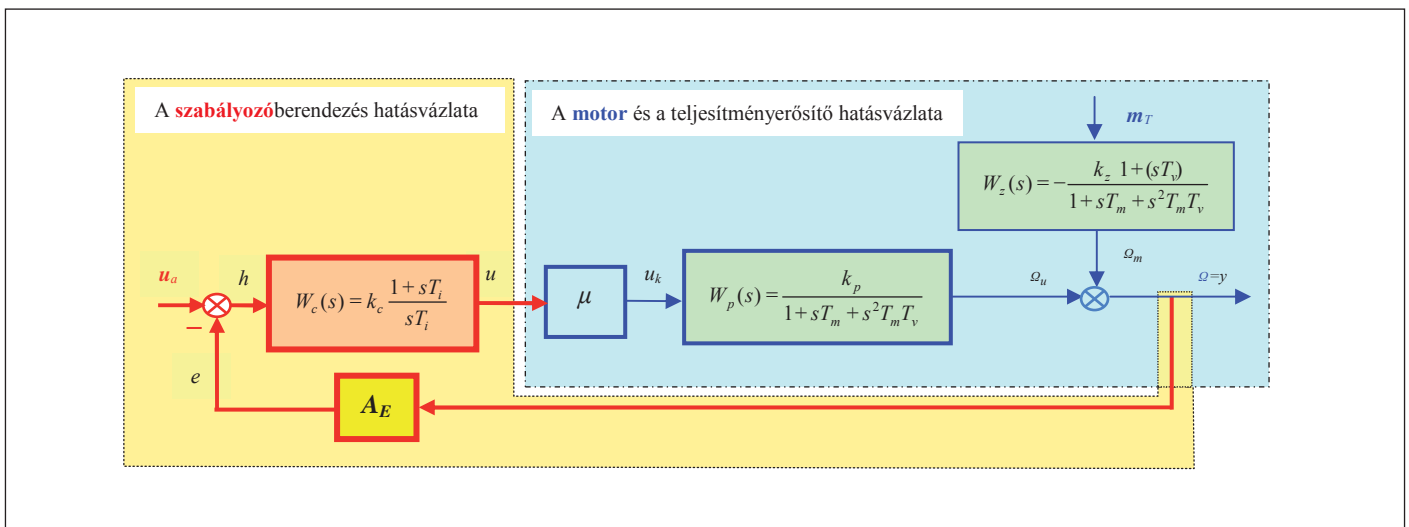
**Analízis az átviteli függvény-módszer alapján**

A negatív visszacsatolásban üzemelő zárt szabályozási rendszer dinamikus tulajdonságait (az időtartomány differenciálegyenletei helyett) az  $s$  Laplace-operátortartományban algebrai egyenletekkel is leírhatjuk. Itt az egyes alrendszereket az **átviteli függvényeikkel** jellemezzük.

A 3. ábra hatásvázlatán a korábban már meghatározott átviteli függvényeikkel definiáltuk az elektromechanikai folyamatot és az elektronikus szabályozót, és időképlettetés nélküli arányos tagként jelöltük a teljesítményerősítőt (átviteli tényezője  $\mu=10$ ) és az érzékelőszervet (átviteli tényezője  $A_E=1/10$  Vs/rad). A hatásvázlaton az  $u_a, m_T$  bemenőjelek, ill. a  $h, u, u_p, \Omega_u, \Omega_m, y=\Omega$  kimenőjelek<sup>3</sup> Laplace-transzformáltjaikkal szerepelnek.

Az átviteli függvény-módszer fontos és előnyös tulajdonsága, hogy  $u_a(s)$  és  $m_T(s)$  ismeretében – a differenciálegyenletek megoldása helyett – egyszerű algebrai műveletekkel lehet kiszámítani a rendszer minden jelének Laplace-transzformáltját. Ezen túlmenően az erre épített „**frekvenciamódszer**” támpontot ad a **PI-szabályozó**  $k_c$  és  $T_i$  paramétereinek **szisztematikus méretezésére** is.

3. ábra A zárt szabályozási rendszer leírása a folyamat és a szabályozóberendezés átviteli függvényeivel



**Megjegyzés**

A hatásvázlat alapján belátható, hogy abban az esetben, ha a frekvenciatartomány egy meghatározott  $0 < \omega < \omega_{max}$  intervallumban a  $h$  hibajel és  $\Omega_u$  szögsebesség között az átviteli függvény „igen nagy” (határesetben: végtelen) érték, akkor a negatívan visszacsatolt rendszer  $y$  kimenő- és  $u_a$  bemenőjelei közötti függvénykapcsolatot a visszacsatolásban szereplő tag átviteli függvényének reciproka determinálja.

Jelen esetben

$$y(s) = \frac{W_0(s)}{1 + W_0(s)} \left[ \frac{1}{A_E} u_a(s) + \frac{W_z(s)}{W_0(s)} m_T(s) \right] \quad W_0(s) \approx \infty$$

$$\cong \frac{1}{A_E} u_a(s)$$

Ez az érzékelőszervvel (az adott esetben az  $\Omega$  szögsebességet mérő tachométer-dinomóval) szembeni elvárásokra világít rá, ugyanis ha ez a szerv nem rendelkezik lehetőség szerint *időkésleltetés nélküli* tulajdonsággal és megfelelő *pontossággal*, akkor az itt keletkező hiba semmilyen szabályozástechnikai „trükkkel” nem orvosolható<sup>4</sup>. *Mindez az érzékelés és az érzékelőszerv körületekintő megválasztását igényli.*

A zárt rendszer hatásvázlatából leolvashatóan a nyitott kör eredő átviteli függvénye, valamint az  $y(s)$  és  $u_k(s)$  jelei:

$$W_0(s) = W_c(s) \mu W_p(s) A_E = \frac{k_c \mu k_p A_E (1 + sT_i)}{sT_i(1 + sT_m + s^2T_mT_v)}$$

$$= \frac{k(1 + sT_i)}{sT_i(1 + sT_m + s^2T_mT_v)} = \frac{G_0(s)}{H_0(s)} \quad k = k_c \mu k_p A_E$$

$$y(s) = \Omega(s) = \frac{W_0(s)}{1 + W_0(s)} \frac{u_a(s)}{A_E} + \frac{W_z(s)}{1 + W_0(s)} m_T(s) =$$

$$= \frac{k(1 + sT_i)}{sT_i(1 + sT_m + s^2T_mT_v) + k(1 + sT_i)} \frac{u_a(s)}{A_E} -$$

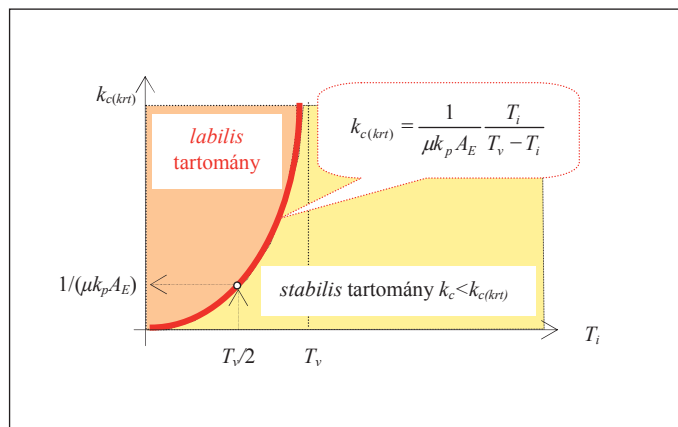
$$- \frac{k_z sT_i(1 + sT_v)}{sT_i(1 + sT_m + s^2T_mT_v) + k(1 + sT_i)} m_T(s)$$

$$u_k(s) = \frac{W_c(s) \mu}{1 + W_0(s)} u_a(s) - \frac{W_z(s) A_E W_c(s) \mu}{1 + W_0(s)} m_T(s) =$$

$$= \frac{k_c(1 + sT_i)(1 + sT_m + s^2T_mT_v)}{sT_i(1 + sT_m + s^2T_mT_v) + k(1 + sT_i)} u_a(s) +$$

$$+ \frac{k_z(1 + sT_v) A_E k_c(1 + sT_i) \mu}{sT_i(1 + sT_m + s^2T_mT_v) + k(1 + sT_i)} m_T(s)$$

A zárt rendszer karakterisztikus egyenlete a nyitott kör  $W_0(s) = G_0(s)/H_0(s)$  átviteli függvényének ismeretében:



4 ábra A  $T_i$ - $k_c$  paramétersík stabilis–labilis tartományai

$$G_0(s) + H_0(s) = k(1 + sT_i) + sT_i(1 + sT_m + s^2T_mT_v) =$$

$$= s^3T_mT_vT_i + s^2T_mT_i + sT_i(1 + k) + k = 0$$

A stabilitási kritérium szerint ennek gyökei (a rendszer  $P_{R1} = \lambda_{R1}$ ,  $P_{R2} = \lambda_{R2}$ ,  $P_{R3} = \lambda_{R3}$  pólusai) a komplex sík negatív valósrészi (stabilis) félsíkján kell hogy legyenek, vagyis a  $G_0(s) + H_0(s)$  kifejezésnek Hurwitz-polinomnak kell lennie. Mivel a  $T_m$ ,  $T_v$ ,  $T_p$  és a  $k = k_c \mu k_p A_E$  paraméterek elvileg pozitív értékek (tehát a Hurwitz-kritérium együttható-feltétele eleve teljesül), a rendszer stabilitásának biztosítása a  $k(T_i - T_v) + T_i > 0$  feltétel betartására egyszerűsödik.  $T_i \geq T_v$  esetében  $k > 0$  bármekkora lehet (ekkor a zárt rendszer strukturálisan stabilis),  $0 < T_i < T_v$  mellett viszont a stabilitás határát jelentő  $k_{krt} = k_{c(krt)}$   $\mu k_p A_E$  kritikus erősítési tényező kifejezéséből:

$$k_{krt} = \frac{T_i}{T_v - T_i} \Rightarrow k_{c(krt)} = \frac{1}{\mu k_p A_E} \frac{T_i}{T_v - T_i}$$

A  $k_{c(krt)} = f(T_i)$  függvény grafikonját a 4. ábrán adjuk meg.

Az ebből levonható következés máris az, hogy  $T_i > T_v$  választás mellett stabilitási problémák a szabályozásban nem keletkeznek, mivel ilyen esetben a  $G_0(s) + H_0(s)$  kifejezés bizonyosan Hurwitz-polinom<sup>5</sup> (lásd 4. ábra).

A következő részben az átviteli függvényekre alapozva tárgyaljuk a szervrendszer PI szabályozójának szisztematikus rendszertechnikai méretezését. Ebben alapvetően a felnyitott rendszer frekvencia függvényének előírt fázistöbbletének kielégítésére támaszkodunk.

(Folytatjuk!)

szbela@iit.bme.hu  
juhaszne@iit.bme.hu

<sup>3</sup> Az itt felsorolt kimenőjelek a hatáslánc egyes tagjainál a bemenőjel funkcióit is ellátják. Például a  $h(s)$  hibajel a különbségképzés kimenőjele, és egyben a  $W_c(s)$  átviteli függvényű szabályozó bemenőjele is stb.

<sup>4</sup> Az időkésleltetés nélküli tag elméleti határeset, a fizikai rendszerekben a jelkésleltetés mindig jelen van. Ha azonban az érzékelés jelkésleltetése a folyamat késleltetéseihez képest elhanyagolható, akkor az idealizált közelítés elfogadható.

<sup>5</sup> A szabályozási rendszer minőségi követelményei miatt azonban a stabilitás nyilvánvaló elvárásán túlmutató feltételeket is be kell tartani.