Szabályozástechnika – 15.

A lineáris dinamikus rendszer és a lineáris szabályozás stabilitáskritériumai

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencné

A zárt szabályozási kör stabilitásáról – a rendszert leíró differenciálegyenletek megoldása nélkül – a stabilitási kritériumok segítségével tudunk véleményt alkotni. A cikk összefoglalóan ismerteti a *Hurwitz* és a *Nyquist* stabilitási kritériumokat, amelyek alkalmazását jól szemléltetik a vizsgált rendszerre felrajzolt helygörbék és átmeneti függvények.

A *Hurwitz* stabilitási kritérium

A $H_R(s)$ polinom p_{Ri} gyökei a zárt rendszer $W_R(s)= G_R(s)/H_R(s)$ eredő átviteli függvényének pólusai, és az aszimptotikus stabilitás biztosításához ezek mindegyike a $real(p_{Ri})<0$ feltételnek kell hogy megfeleljen[1].

> **Aszimptotikusan stabilis a lineáris zárt szabályozási rendszer** (a *zárthurkú* szabályozási kör), **ha a nyitott kör $W_0(s)=G_0(s)/H_0(s)$ átviteli függvényének $G_0(s)$ számlálójából és $H_0(s)$ nevezőjéből képzett $H_R(s)=H_0(s)+G_0(s)$ karakterisztikus polinomja *Hurwitz* polinom.**

Az alrendszerek állapotegyenleteinek ismeretében a zárt rendszer eredő állapotegyenlete is meghatározható, és ennek állapotmátrixa A_R. A szabályozás aszimptotikus stabilitási feltételének egy más megfogalmazása: **aszimptotikusan stabilis a lineáris szabályozási rendszer, ha a zárt kör eredő állapotegyenletének A_R állapotmátrixa negatív valós részű sajátértékekkel rendelkezik: $real(\lambda_{Ri})<0$.** (A $H_R(s)$ karakterisztikus egyenlet p_{Ri} gyökei azonosak az A_R állapotmátrix λ_{Ri} sajátértékeivel!). Annak eldöntésére, hogy a karakterisztikus egyenlet kielégíti-e az aszimptotikus stabilitás követelményét (mellőzve a gyökök tényleges kiszámítását), a *Hurwitz* kritérium most is alkalmas. Alkalmazásának egy lényeges korlátja, hogy *csak holtidő nélküli lineáris rendszerek esetén használható.*

A *Nyquist* stabilitási kritériumok

A jelentős gyakorisággal előforduló folyamatokban az energiatároló és a holtidő okozta jelkésleltetések egyidejűleg vannak jelen, és az ezeket működtető szabályozók általában **PID**-struktúrát alkotnak. A szabályozó, a folyamat, a nyitott kör tipikus átviteli függvényei és a zárt rendszer karakterisztikus egyenlete ekkor:

$$W_c(s)=\frac{G_c(s)}{H_c(s)}=K_c\left(1+\frac{1}{sT_I}+\frac{sT_D}{1+sT}\right)=k_c\,\frac{(1+sT_i)(1+sT_d)}{sT_i(1+sT)}\ ,$$

$$W_p(s)=\frac{G_p(s)}{H_p(s)}=\frac{k_p}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}e^{-sT_h}\ ,$$

$$W_0(s)=\frac{G_c(s)}{H_c(s)}\frac{G_p(s)}{H_p(s)}=\frac{G_0(s)}{H_0(s)}=$$

$$=k_c\,\frac{(1+sT_i)(1+sT_d)}{sT_i(1+sT)}\,\frac{k_p}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}e^{-sT_h}\ =$$

$$=\frac{k}{T_i}\,\frac{(1+sT_i)(1+sT_d)}{s(1+sT)(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}e^{-sT_h}\ ,$$

$$H_R(s)=G_0(s)+H_0(s)=$$

$$=k_i(1+sT_i)(1+sT_d)e^{-sT_h}+s(1+sT)(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)=0$$

$$(k_i=k_ck_p/T_i=k/T_i,\quad k=k_ck_p)\ \cdot$$

A karakterisztikus egyenlet – az $exp(-sT_h)$ transzcendens tényező és $T_h\neq 0$ miatt – nem polinom, gyökeinek száma elvileg végtelen, és ezért a stabilitásvizsgálatra a *Hurwitz* kritérium sem használható[2].

A stabilitásvizsgálat *„frekvenciamódszere"* a nyitott kör $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvényén alapszik. A frekvenciamódszer lényege és használhatósága abban nyilvánul meg, hogy egyrészt:

- a stabilitásvizsgálaton túlmenően támpontot ad arra, hogy a *nyitott kör* $W_0(j\omega)=W_c(j\omega)W_p(j\omega)$ frekvenciafüggvényének

[1] A stabilitásvizsgálat természetes módszere az $1+W_0(s)=0$ karakterisztikus egyenlet p_{Ri} gyökeinek a kiszámítása lenne, de magas fokszám esetében ez problémát jelenthet. **MATLAB**-támogatás: `pR=roots(HR)` vagy `pR=eig(AR)`.

[2] Egy lehetséges megoldás lehet az $exp(-sT_h)$ transzcendens tényező *Strejc* vagy *Pade* polinomokkal történő közelítése. Ezek alkalmazásával a *holtidős* tényezőt is tartalmazó transzcendens karakterisztikus egyenlet polinom egyenlettel közelíthető, és a *Hurwitz* kritérium ekkor már felhasználható.

paraméterei[3] a *zárt szabályozási rendszer* – a $v_R(t)$ átmeneti függvényének alapján definiált – *minőségi jellemzőire* milyen befolyást gyakorolnak, másrészt

- egyszerűen képes kezelni az $exp(-sT_h)$ holtidős tényezőből származtatható problémákat, a transzcendens karakterisztikus egyenletet.

Az általános *Nyquist* stabilitási kritérium[4]

Ez a kritérium akkor is érvényes, ha a felnyitott kör $W_0(s)$ átviteli függvényének pozitív valósrészű (labilis) pólusai is vannak, vagyis a *nyitott* kör – a szabályozó vagy a folyamat labilitása miatt – labilis. Megalkotására az adott inspirációt, hogy az $1+W_0(s)=0$ karakterisztikus egyenlet p_{Ri} gyökeinek meghatározása nélkül is el lehessen dönteni, hogy a gyökök között van-e pozitív vagy zérus valósrésszel rendelkező, *mert ha nincs, akkor a zárt szabályozási rendszer aszimptotikusan stabilis*[5]. Az általános *Nyquist* stabilitási kritérium:

> $W_R(s)=W_0(s)/[1+W_0(s)]$ átviteli függvényével leírt **zárt** szabályozási rendszer **aszimptotikusan stabilis**, ha a **felnyitott** kör $W_0(j\omega)$ teljes – negatív ω körfrekvenciákra is kiterjesztett – frekvenciafüggvénye (*Nyquist* diagramja) az óramutató járásával ellentétes irányába haladva annyiszor fogja körül a komplex számsík **–1+*j*0** pontját, amennyi labilis (pozitív valósrészű) pólusa van a **felnyitott** kör $W_0(s)$ átviteli függvényének (**általános** *Nyquist* stabilitási kritérium).

A *Nyquist* stabilitási kritérium alapján nyomatékosan hangsúlyozni kell, hogy a $W_R(s)$ eredő átviteli függvényű *zárt* szabályozási rendszer

- stabilitása a *felnyitott kör* $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvényének a komplex számsíkon történő menete alapján dönthető el,
- a *zárt* rendszer $W_R(s)=W_0(s)/[1+W_0(s)]$ átviteli függvényének biztosan *vannak* p_{Ri} *labilis pólusai* (vagyis az $1+W_0(s)=0$ karakterisztikus egyenletnek pozitív valósrészű gyökei), ha a kritérium *nem teljesül*,
- ha a *felnyitott körnek* vannak pozitív valósrészű, *labilis* p_i pólusai (vagyis a nyitott kör labilis), a zárt rendszer még ettől függetlenül lehet *stabilis*, ha az általános *Nyquist* kritérium feltételének a $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvény *megfelel*,
- ha a *felnyitott körnek* csak negatív valósrészű, *stabilis* p_i pólusai vannak (vagyis a nyitott kör stabilis), a zárt rendszer még ettől függetlenül lehet *labilis*, ha az egyszerűsített *Nyquist* kritérium feltételének a $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvény *nem felel* meg.

Az egyszerűsített *Nyquist* stabilitáskritérium

Ez a stabilitáskritérium arra az esetre érvényes, amikor a nyitott kör $W_0(s)$ átviteli függvényének kizárólag *negatív valósrészű* p_i pólusai vannak, vagyis a nyitott kör aszimptotikusan stabilis, önbeálló[6]. A kritérium ekkor:

> *Ha a* ***felnyitott kör*** *$W_0(s)$ átviteli függvényének* ***nincsenek*** *jobb oldali (labilis) pólusai, akkor a* ***zárt*** *rendszer stabilitásának az a feltétele, hogy a* ***felnyitott*** *kör $W_0(j\omega)$ teljes frekvenciafüggvénye* ***ne fogja körül*** *a komplex számsík* **–1+*j*0** *pontját.*

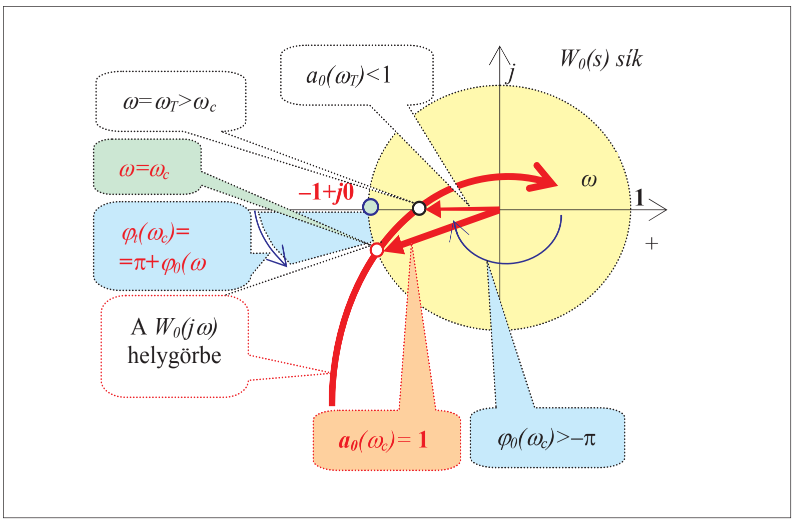
Gyakorlati jelentősége az egyszerűsített[7] *Nyquist* kritériumnak van, mivel általában a felnyitott körnek ritkán vannak pozitív valósrészű pólusai. Stabilis, zárt rendszer esetében a nyitott kör $W_0(j\omega)$ *Nyquist* helygörbéjének menetét az 1. ábra tartalmazza.

Az a körfrekvencia, ahol a $W_0(j\omega)$ helygörbe az egységsugarú körbe belép, a nyitott kör frekvenciafüggvényének ω_c *vágási körfrekvenciája*[8]. Ezen az ω_c körfrekvencián $absW_0(j\omega_c)=a_0(\omega_c)=1$ és $arcW_0(j\omega_c)=\varphi_0(\omega_c)$. Bevezetve a $\varphi_t(\omega_c)=\pi+\varphi_0(\omega_c)$ *fázistöbblet*[9] (fázistartalék, 1. ábra) fogalmát, az egyszerűsített *Nyquist* stabilitási kritérium a fázistöbblettel is megfogalmazható. Eszerint:

> *Aszimptotikusan stabilis a* ***zárt szabályozási rendszer,*** *ha a* ***nyitott kör*** ***W_0**(jω) frekvenciafüggvényének* ***$\varphi_t(\omega_c)$ fázistöbblete pozitív.*** **[$\varphi_t(\omega_c)>0$, fázistöbblet kritérium]**

A fázistöbblet számszerű értéke – azon túlmenően, hogy a zárt rendszer stabilitásáról ad tájékoztatást – annak megítélésére is alkalmas, hogy a rendszernek mekkora *stabilitási tartaléka* van. Gyakorlati tapasztalat, hogy a nyitott kör frek-

1. ábra Aszimptotikusan stabilis szabályozási rendszer $W_0(j\omega)$ *helygörbéje*



[3] A $W_0(j\omega)=W_c(j\omega)W_p(j\omega)$ frekvenciafüggvényben a folyamat $W_p(j\omega)$ frekvenciafüggvénye általában adott.

[4] A kritériumot az 1930-körüli években – a komplex változós függvénytan néhány tételét felhasználva – *Nyquist* dolgozta ki.

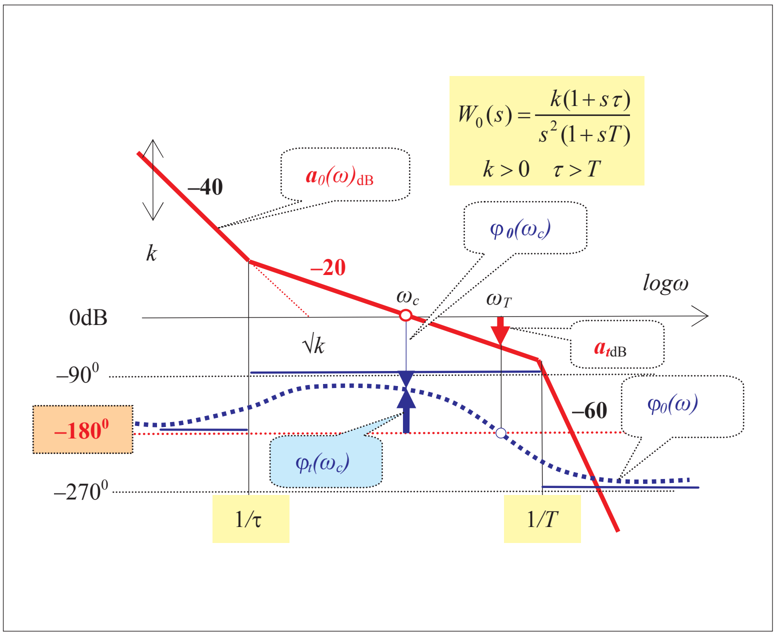
[5] A *Hurwitz* stabilitáskritérium alapján is a p_{Ri} gyökök *tényleges meghatározása nélkül* megválaszolható az a kérdés, hogy a holtidőmentes rendszer karakterisztikus egyenletének gyökei között van-e olyan, amelyre $real(p_{Ri})\geq 0$. A *Nyquist* kritérium azonban arra is válasz ad, hogy hány db gyök van az *s* sík labilis tartományában, és *akkor is alkalmazható, ha a karakterisztikus egyenlet transzcendens*.

[6] Ezek az *arányos* (0 típusú) szabályozások. A komplex függvénytan tételei alapján igazolható, hogy az egyszerűsített *Nyquist* kritérium az integrálszabályozásokra is kiterjeszthető. (Irodalom: *Benjamin C. Kuo*: Önműködő szabályozó rendszerek)

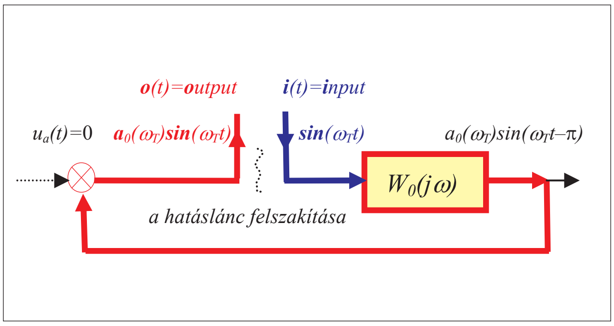
[7] Az egyszerűsített *Nyquist* kritérium az általános kritérium speciális esete.

[8] Általában a $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvény az aluláteresztő szűrő tulajdonságával rendelkezik, és ezért $0<\omega<\omega_c$ frekvenciaintervallumban $a_0(\omega)>1$, az $\omega_c<\omega<\infty$ intervallumban pedig $a_0(\omega)<1$. Ennek megfelelően az ω_c körfrekvenciát a nyitott kör frekvenciafüggvényének a vágási körfrekvenciájaként definiáljuk (*cut-off frequency*).

[9] A fázistöbblet az a szög, amelynek zérussá válásával a zárt szabályozási rendszer a stabilitás határára kerül.



2. ábra A $\varphi_t(\omega c)$ fázistöbblet és az $a_t(\omega T)_{dB}$ amplitúdótöbblet leolvasása a Bode diagramon



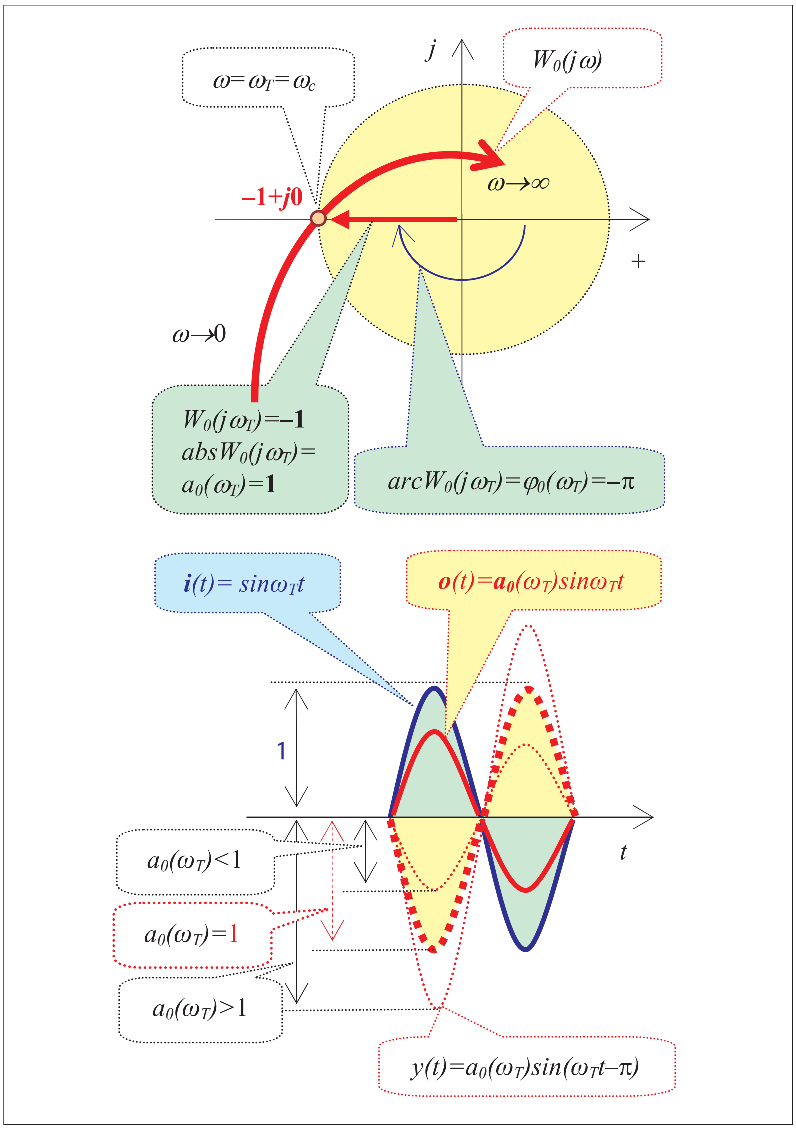
3. ábra A nyitott szabályozási rendszer

venciafüggvényének $\varphi_t(\omega_c)\cong\pi/3$ fázistöbblete mellett a zárt szabályozási rendszer nem csupán kielégíti a stabilitási feltételt, hanem egységugrás szerint változó alapjel esetében elfogadható mértékű túllendüléssel ($\sigma(\%)<10\%$) áll be az $y(\infty)=v_R(\infty)=$*állandó* egyensúlyi helyzetébe. Ezért lehet célkitűzés a szabályozó $W_c(s)$ átviteli függvényének olyan megválasztása, hogy a $W_0(j\omega)=W_c(j\omega)W_p(j\omega)$ frekvenciafüggvény $\varphi_t(\omega_c)$ fázistöbbletére vonatkozó előírások teljesüljenek (*rendszertechnikai méretezés előírt fázistöbbletre*). A frekvenciamódszeren alapuló stabilitásvizsgálat tehát a *szabályozó méretezésében* is jól felhasználható.

A fázistöbblet a *Bode* diagramon is megjeleníthető. Az $a_0(\omega)_{dB}$ amplitúdómenet az ω_c vágási körfrekvenciánál metszi a 0 dB tengelyt, vagyis itt $a_0(\omega_c)=1$, $20\log a_0(\omega_c)=a_0(\omega_c)_{dB}=0$ dB. Ezen a körfrekvencián a $W_0(j\omega_c)$ frekvenciafüggvény $\varphi_0(\omega_c)$ fázisszögének a $0>\varphi_0(\omega_c)>-\pi$ intervallumban kell lennie, mivel ekkor biztosítható a fázistöbblet $\varphi_t(\omega_c)=\pi+\varphi_0(\omega_c)>0$ értéke (2. ábra).

Az ábrán feltüntettük azt az ω_T körfrekvenciát is, amelynek jellemző tulajdonsága, hogy ezen a körfrekvencián $\varphi_0(\omega_T)=-\pi$. Ha itt $a_t(\omega_T)<1$, ill. $a_t(\omega_T)_{dB}<0$ dB, akkor a k erősítési tényezőt a_t-szeresére lehetne növelni ahhoz, hogy a rendszer a stabilitási határhelyzetbe kerüljön. Az a_t a rendszer *amplitúdótartaléka (amplitúdótöbblete, gain margin)*. A *Bode* diagram jól szemlélteti a $W_0(j\omega)$ függvény azon tulajdonságát, hogy a k körerősítés változása a fázismenetet változatlanul hagyja, az amplitúdómenetet pedig – fel (↑) vagy le (↓) irányokban – önmagával párhuzamosan mozgatja. A $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvény fázistartaléka, ill. amplitúdótartaléka arra ad támpontot, hogy a stabilitási határhelyzetet jelentő $-1+j0$ ponthoz viszonyítva a nyitott kör frekvenciafüggvényének *Nyquist* helygörbéje hogyan halad. A $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvény hasonló jellemzője a *Nyquist* stabilitási tartalék (*modulus margin*) és a késleltetési tartalék[10] (*delay margin*).

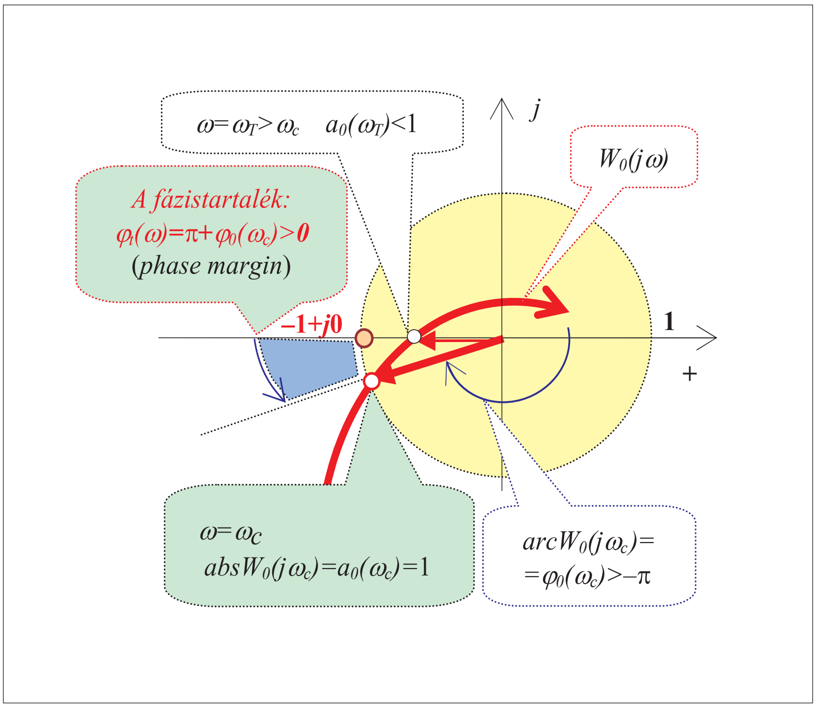
4. ábra A stabilitás határhelyzetében lévő rendszer $W_0(j\omega)$ helygörbéje



Fizikai magyarázat a fázistöbblet kritériumhoz

Tekintsük a stabilis, (önbeálló), nyitott körrel rendelkező szabályozási rendszert a hibajel hatásvonalában felnyitva (3. ábra). Az így keletkezett *input* bemenetre külső jelforrásból adjunk *egységnyi amplitúdójú*, olyan ω_T körfrekvenciájú, harmonikus $i(t)=\sin(\omega_T t)$ jelet, amely az y kimeneten stacioner állapotban a be-

[10] Irodalom: *Keviczki László, Bars Ruth, Hetthéssy Jenő, Barta András, Bányász Csilla*: Szabályozástechnika. Műegyetemi Kiadó.



5. ábra Aszimptotikusan stabilis szabályozási rendszer $W_0(j\omega)$ helygörbéje

menőjelhez viszonyítva –180° fázistolásban lévő $y(t)=y_{max}sin(\omega_T t-\pi)=a_0(\omega_T)sin(\omega_T t-\pi)$ jelet hoz létre[11].

Ez a jel a különbségképző tagon keresztül a felnyitott kör *output* kimenetére $a_0(\omega_T)$ amplitúdóval, és a *bemenőjellel azonos fázisban* érkezik vissza, hiszen az alapjel zérus értéke miatt $o(t)=-y(t)=-a_0(\omega_T)sin(\omega_T t-\pi)=a_0(\omega_T)sin(\omega_T t)$. Ha ez az $a_0(\omega_T)$ amplitúdó azonosan egységnyi (vagyis a nyitott hurok frekvenciafüggvényének az ω_T körfrekvencián felvett értéke $W_0(j\omega_T)=-1+j0$), akkor a nyitott kör output kimenetéről működtetve az input bemenetet, a harmonikus lengőmozgás a zárt rendszerben fennmarad. Ez egyébként a stabilitás határhelyzete: a $W_0(j\omega)$ helygörbe ekkor átmegy a komplex sík $-1+j0$ pontján (4. ábra).

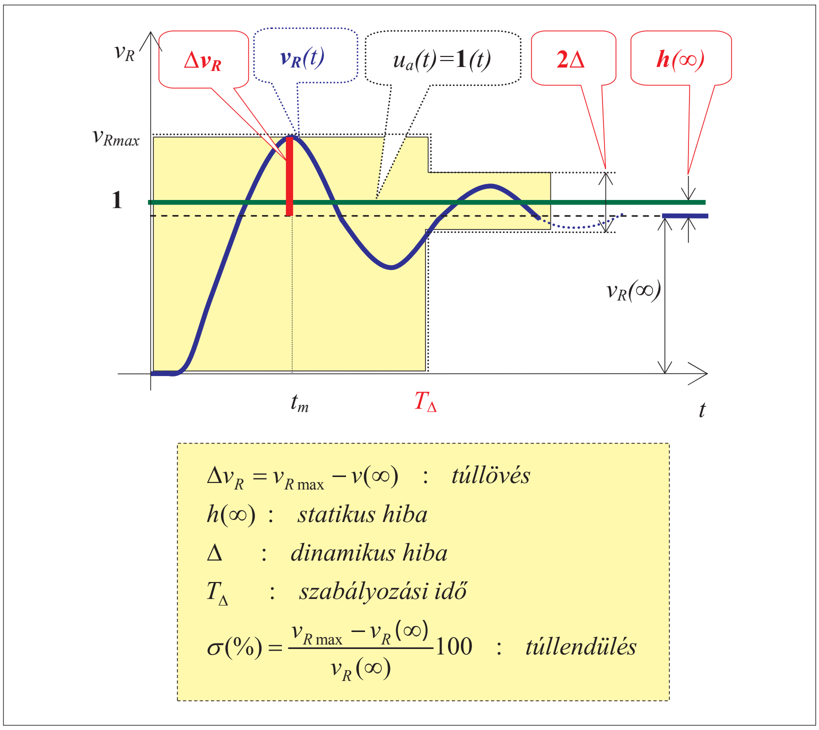
Ha az ω_T körfrekvenciánál $a_0(\omega_T)>1$, akkor a nyitott kör output jelének amplitúdója az input jel amplitúdójánál nagyobb, így a kör zárásakor a zárt rendszer gerjed (*labilis* zárt rendszer). Ellentétes helyzet alakul ki akkor, ha $a_0(\omega_T)<1$, ekkor ugyanis a kör zárásakor a lengés nem tud fennmaradni, vagyis a zárt rendszer $t\to\infty$ mellett zérusértékű jelekkel nyugalomba kerül (*stabilis* zárt rendszer). Stabilis zárt rendszer esetében ezért a nyitott kör $W_0(j\omega)$ *Nyquist* helygörbéjének menete az 5. ábrának megfelelően változik.

A szabályozás elfogadható minőségű üzemeltetéséhez *nem elég* a stabilitási feltételek ($\varphi_t(\omega_c)>0$)[12] garantálása. A rendszernek – ahhoz, hogy a megengedett mértékű túllendülése legyen, ill. a munkapont változásai miatt bekövetkező paraméterváltozások hatására a labilitás okozta veszélyeket elkerüljük – adott mértékű *fázistartalékkal* kell rendelkeznie. Gyakorlati tapasztalatok alapján a fázistöbbletet $45°<\varphi_t(\omega_c)<60°$ intervallumbeli értékek valamelyikére célszerű választani. A $\varphi_t(\omega_c)=60°$ fázistartalék mellett a zárt rendszer átmeneti függvényének $\sigma(\%)$ túllendülése kb. 10% alatti értékre várható[13] (6. ábra).

Az $y(t)=v_R(t)$ szabályozott jellemző T_Δ idő alatt érkezik be a $v_R(\infty)$ érték körüli 2Δ értékű dinamikus hibasávba, amit a tranziens további folyamata alatt már el sem hagy. A T_Δ idő a beállás gyorsaságára jellemző időadat, amelynek értékét alapvetően a nyitott kör $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvényének ω_c *vágási körfrekvenciája* befolyásol:

$$\frac{3}{\omega_c}<T_\Delta<\frac{10}{\omega_c}\ .$$

6. ábra A zárt szabályozási rendszer átmeneti függvénye és minőségi jellemzői



A folytatásban egy külső gerjesztésű, egyenáramú, villamos motor műveleti erősítőkkel létrehozott, elektronikus **PI** szabályozóval megvalósított fordulatszám-szabályozásának példáján mutatjuk be az előzőekben ismertetett elmélet alkalmazását.

(Folytatjuk!)

szbela@iit.bme.hu
juhaszne@iit.bme.hu

[11] Ilyen ω_T körfrekvenciájú harmonikus kimenőjel általában akkor létezik, ha $W_0(s)$ megfelelő számú ($n-m\geq3$) pólustöbblettel rendelkezik, vagy holtidőt is tartalmazó tagot definiál. Ekkor lehetséges, hogy egy $\omega_T>0$ körfrekvencián az $y(t)$ jelnek az $i(t)$ bemenőjelhez képest –180° fáziseltolása legyen.

[12] A $\varphi_t(\omega_c)>0$ azt is jelenti, hogy a nyitott kör $W_0(s)=G_0(s)/H_0(s)$ átviteli függvényének $G_0(s)$ számlálója és $H_0(s)$ nevezője alapján képezhető zárt kör $H_0(s)+G_0(s)$ karakterisztikus polinomja *Hurwitz* polinom.

[13] Integrálszabályozás esetében $v_R(\infty)=1$. A $\varphi_t(\omega_c)$ fázistöbblet *csökkenése* a Δv_R túllövés *növekedését* okozza.