# Szabályozástechnika – 14.

## A lineáris dinamikus rendszer és a lineáris szabályozás stabilitáskritériumai

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencné

**A lineáris dinamikus rendszerek, ill. a lineáris szabályozási rendszerek működésének egyik legfontosabb követelménye a stabilitás. A szabályozástechnika elméletével foglalkozó cikksorozat folytatásában a stabilitás feltételeire és kritériumaira keressük a választ. A stabilitáskritériumok jelentősége abban áll, hogy a jelátvivő tagok, ill. a zárt szabályozási kör stabilitásáról a rendszert leíró differenciálegyenletek megoldása nélkül tudunk véleményt alkotni. Ez a nyilvánvaló könnyebbség sem nélkülözheti azonban a számítástechnikai eszközök és szolgáltatások igénybevételét.**

### Az állapotegyenlet megoldása. A rendszer összetett mozgása

A folytonos idejű dinamikus **SISO** rendszer $n$ rendű, állandó együtthatójú, *lineáris differenciálegyenletének*, ill. a **MIMO** rendszer $n$ számú, elsőrendű lineáris differenciálegyenletet tartalmazó *állapotegyenletének* analitikus és numerikus (számítógépes) megoldási módszerei vannak[1]. Az állapotegyenlet analitikus megoldóképlete[2]:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau =$$

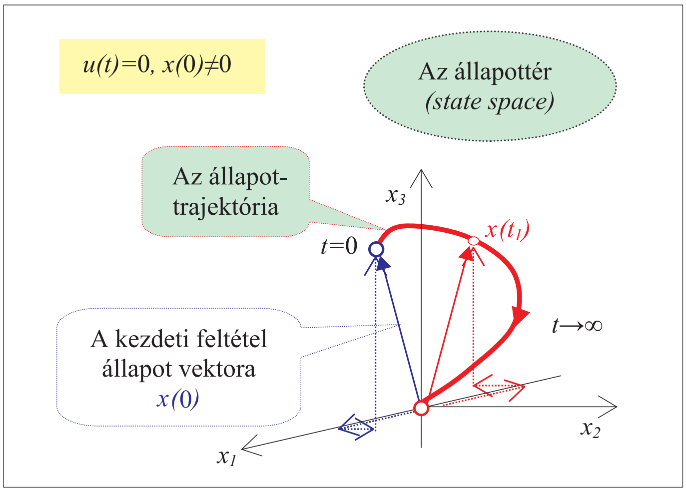
$$= \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) =$$

$$= C\left[\phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau\right] + Du(t)$$

Az $x(t)$ megoldásnak az $x_s(t)=e^{At}x(0)$ kezdeti feltételektől és az $x_g(t)=\int e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}u(\tau)d\tau$ gerjesztéstől függő mozgáskomponense van. Stabilis a lineáris dinamikus rendszer, ha $t\to\infty$ mellett az $x_s(t)$ komponens (a *sajátmozgás*) az állapottér origójába tart ($x_s(\infty)=e^{At}x(0)_{t=\infty}=0$), vagy az $x_g(t)$ komponens (a *gerjesztett mozgás*) korlátos $u(t)$-re korlátos $x_g(t)$ választ ad[3]. Ebben az esetben – miután az $y(t)$ válasz az $x(t)$ állapotváltozó és az $u(t)$ gerjesztés lineáris kombinációja – az $y(t)$ is korlátos[4].

A rendszer stabilitását, tranziens tulajdonságait a $det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$ *karakterisztikus egyenletének* $\lambda_i$ gyökei (az $\boldsymbol{A}$ állapotmátrix *sajátértékei*) határozzák meg. Ennek oka az, hogy a kezdeti feltételek által generált $x_s(t)=e^{At}x(0)$ sajátmozgás időfüggvényei $r_i exp(\lambda_i t)$ részelemekből tevődnek össze[5], és ezek $t\to\infty$ mellett akkor tartanak zérushoz, ha $real(\lambda_i)<0$. Tehát az **aszimptotikusan stabilis**, lineáris dinamikus rendszer karakterisztikus egyenletének minden $\lambda_i$ gyöke negatív valós résszel rendelkezik, vagyis a $det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ kifejezés *Hurwitz* polinom. Ez más megfogalmazásban azt jelenti, hogy a dinamikus rendszer aszimptotikus stabilitása akkor biztosított, ha $\boldsymbol{A}$ állapotmátrixának minden $\lambda_i$ sajátértéke a komplex számsík negatív valós részű (stabilis) félsíkján helyezkedik el. Az aszimptotikusan stabilis rendszer $x_s(t)=e^{At}x(0)$ sajátmozgását szemléltető állapottrajektória $t\to\infty$ mellett az állapottér origójába tart (1. ábra).




*1. ábra Az aszimptotikusan stabilis rendszer $x_s(t)$ sajátmozgásának állapottrajektóriája*

A stabilitás szemléletesen köthető ahhoz a tulajdonsághoz is, hogy a rendszer rendelkezik-e azzal az elvárható működésmóddal, hogy $u(t)=u_0\mathbf{1}(t)$ belépő vizsgálójellel

---

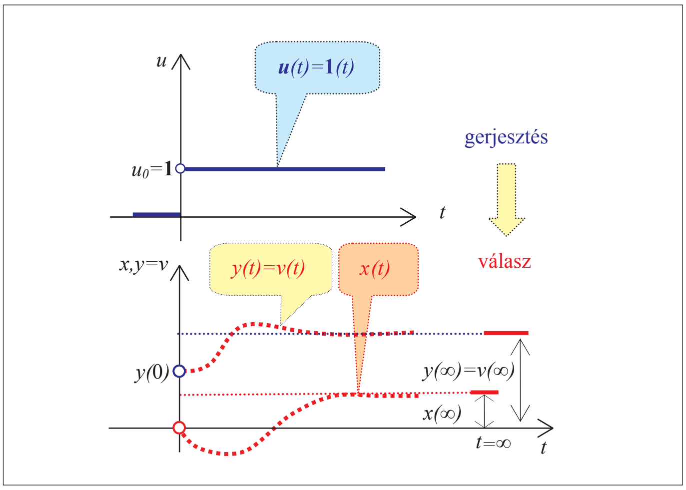
[1] Az $n$ rendű, állandó együtthatójú, lineáris differenciálegyenlet analitikus megoldása visszavezethető az $n$ számú elsőrendű differenciálegyenletből álló differenciálegyenlet-rendszer – vagyis az állapotegyenlet – megoldására (lásd az átviteli függvény különféle felbontásai anyagrészt). Az állapotegyenlet megoldása MATLAB-támogatással: `[y,x]=lsim(A,B,C,D,u,t,x0)`.

[2] Ez a megoldóképlet igen egyszerű, ha elsőrendű rendszerről van szó ($n$=1). Ekkor az állapotmátrix mérete $n\times n$=1×1, vagyis $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}$ skaláris, sajátértéke $\lambda=a$, az *alapmátrix* egy közönséges $\Phi(t)=e^{at}$ exponenciális függvény, tehát az $x(t)$ és $y(t)$ kiszámítása elemi matematikai ismereteket igényel. Lényegesen más a helyzet, ha a rendszám $n$>1. Ekkor az $\boldsymbol{A}$ állapotmátrix mérete $n\times n\geq 2\times 2$, és a dinamikus rendszer leírásában alapvető szerepet betöltő *alapmátrix* a $\Phi(t)=e^{At}$ mátrixfüggvény. Ennek értelmezése és kiszámítása mátrixalgebrai ismereteket igényel.

[3] Bounded–Input–Bounded–State Stability

[4] **B**ounded–**I**nput–**B**ounded–**O**utput Stability (**BIBO**-stabilitás)

[5] Ez akkor van így, ha a rendszer $\boldsymbol{A}$ állapotmátrixának minden $\lambda_i$ ($i$=1, 2,…, $n$) sajátértéke egymástól különböző.




*2. ábra Az aszimptotikusan stabilis rendszer u(t)=**1**(t)-re adott x(t) és y(t)=v(t) válaszai*

gerjesztve képes-e olyan állapotot elérni, amikor is $t\to\infty$ mellett az *x(t)* állapotváltozók és az *y(t)* kimenőjelek az *x(∞)=állandó*, *y(∞)=állandó* értékekhez tartanak. Ha a dinamikus rendszer $x_g(t)$ gerjesztett mozgása az állandó $u_0$ bemenőjelre állandó $x_0=-A^{-1}Bu_0$ állapotváltozóval és állandó $y_0=(-CA^{-1}B+D)u_0$ állandósult kimenőjellel válaszol, akkor a rendszer *aszimptotikusan stabilis*. Az *x(0)*=0 kezdeti feltételek mellett az *u(t)*=**1***(t)* egységugrásra adott *y(t)=v(t)* válasz a tag átmeneti függvénye[6]. Az aszimptotikusan stabilis rendszer átmeneti függvénye $t\to\infty$ mellett egy állandó *y(∞)=v(∞)* értékhez tart (2. ábra).

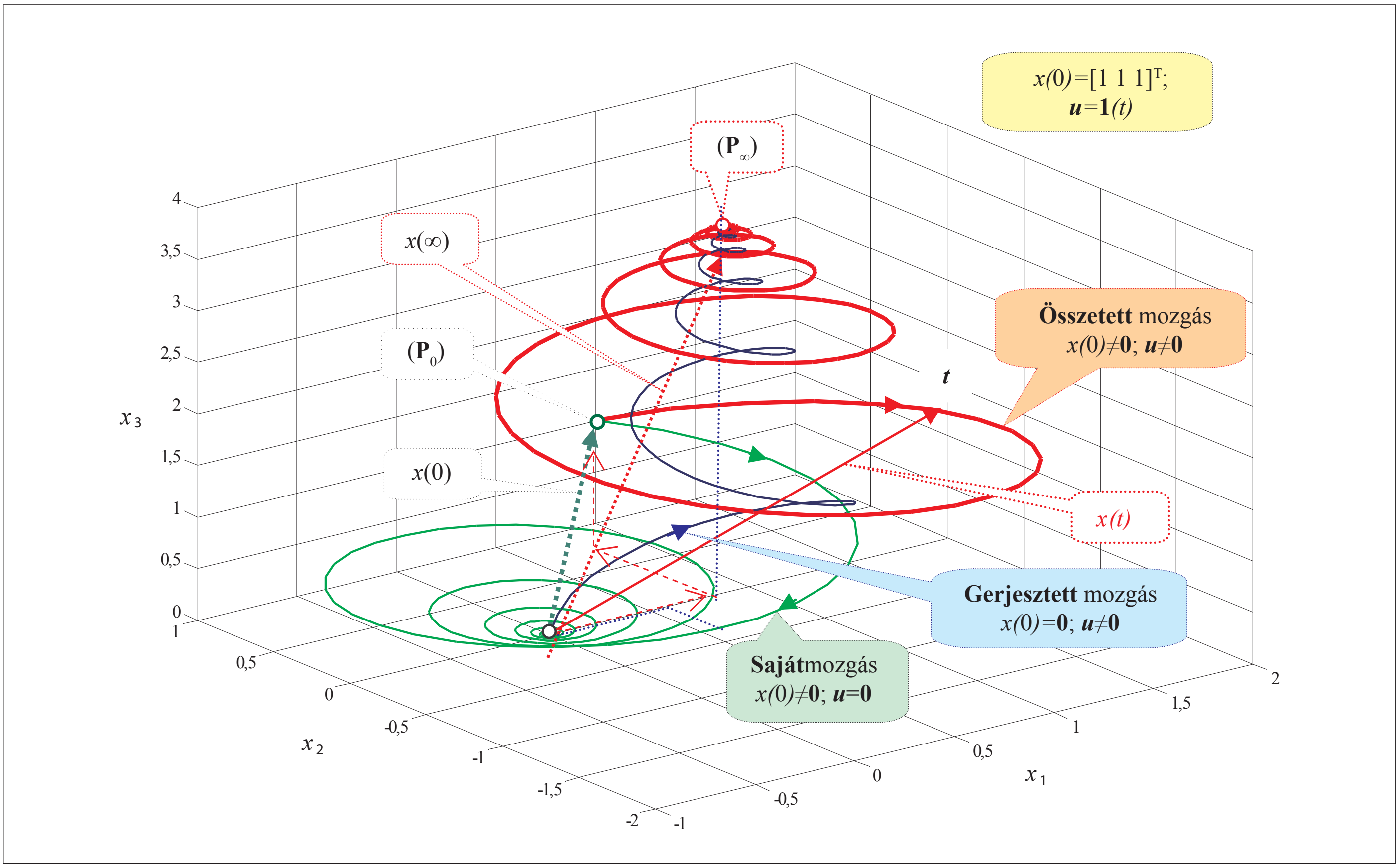
Példa:
Adott egy harmadrendű, lineáris **SISO** rendszer (*j*=1, *k*=1, *n*=3) állapotegyenlete:

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=f_1(x_1,x_2,x_3,u)=-0{,}2x_1(t)+2x_2(t)+u(t)$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt}=f_2(x_1,x_2,x_3,u)=-2x_1(t)-0{,}2x_2(t)+u(t)$$
$$\frac{dx_3(t)}{dt}=f_3(x_1,x_2,x_3,u)=-0{,}25x_3(t)+u(t)$$
$$y(t)=x_2(t).$$

Az *u(t)*=**1***(t)* gerjesztés és $x(0)=[x_1(0)\ x_2(0)\ x_3(0)]^T=[1\ \ 1\ \ 1]^T$ kezdeti feltételek mellett a rendszer $x_s(t)$ sajátmozgását, az $x_g(t)$ gerjesztett mozgását és az $x(t)=x_s(t)+x_g(t)$ összetett mozgását állapottrajektórián szemléltetjük (3. ábra). Miután az ***A*** állapotmátrix minden sajátértéke negatív valósrészű ($\lambda_{1,2}=-0{,}2\pm 2j$, $\lambda_3=-0{,}25$), a rendszer aszimptotikusan stabilis. Az egyensúlyi helyzetben az állapotsebességek zérusok, ezért ($\mathbf{P}_\infty$) az *x(∞)* koordinátákkal rendelkező stabilis egyensúlyi pont[7]. Láthatóan az adott aszimptotikusan stabilis lineáris rendszer sajátmozgása az állapottér ($\mathbf{P}_0$) pontjából indulva az origóba, a gerjesztett mozgás az origóból a ($\mathbf{P}_\infty$) egyensúlyi pontba, az összetett mozgás pedig a ($\mathbf{P}_0$) pontból a ($\mathbf{P}_\infty$) pontba tart.

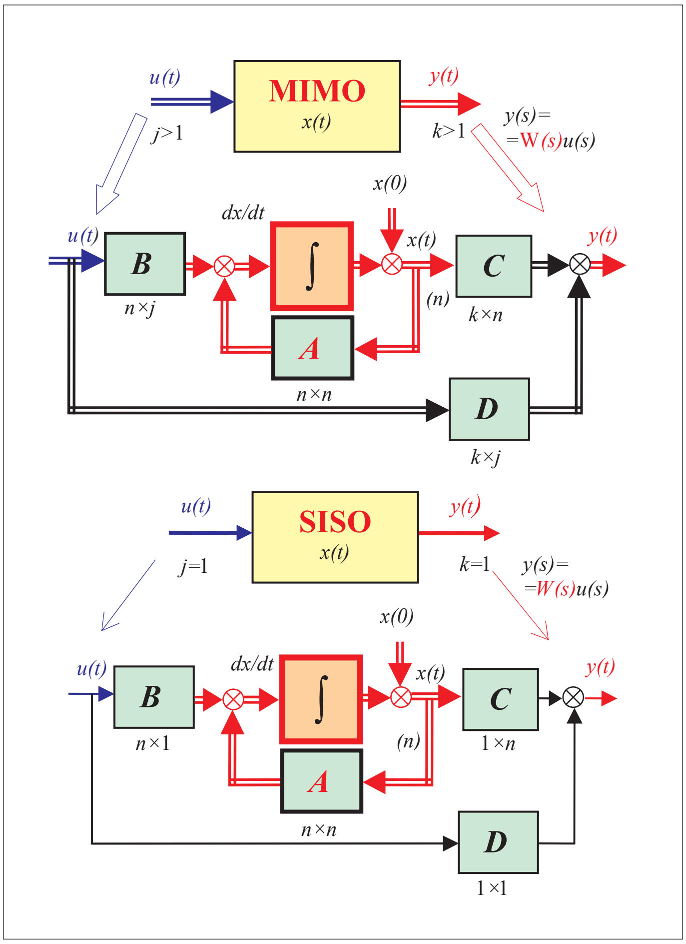
A következő részben a stabilitás problémakörét tárgyaljuk, és bemutatjuk az általános lineáris *dinamikus rendszer* (a dinamikus jelátvivő tag), ill. a lineáris *szabályozási rendszer* stabilitásának vizsgálati módszereit (*Hurwitz* kritérium, általános és egyszerűsített *Nyquist* kritérium, *fázistöbblet*-kritérium).

*3. ábra Az aszimptotikusan stabilis lineáris rendszer összetett mozgása és ennek komponensei az állapottérben*




[6] Az aszimptotikusan stabilis **MIMO** tag *j* számú *u(t)*, *n* számú *x(t)* és *k* számú *y(t)* jeleinek mindegyike a 2. ábrának megfelelően alakuló időfüggvény. Miután az *x(t)*, *y(t)* jelek mindegyik komponense mindegyik bemenőjel komponenstől függ, az *y(t)=v(t)* átmeneti függvények száma $k\times j$.

[7] Az állapotegyenletet **MATLAB**-támogatással (az `[ys,xs]=initial (A,B,C,D,x0)` és az `[y,x]=lsim(A,B,C,D,u,t,x0)` függvények felhasználásával) oldottuk meg. A ($\mathbf{P}_\infty$) egyensúlyi pont koordinátái $x(\infty)=-A^{-1}Bu(\infty)$.




*4. ábra A MIMO- és a SISO-rendszerek hatásvázlatai*

**A lineáris dinamikus rendszer (a dinamikus jelátvivő tag) stabilitása. A stabilitás általános feltétele**

Általános esetben a dinamikus rendszernek $j\geq1$ számú $u$ bemenőjele, $n\geq1$ számú $x$ állapotváltozója és $k\geq1$ számú $y$ kimenőjele van (**MIMO** rendszer). Abban a speciális esetben, ha $j=1$, $k=1$ és $n\geq1$, akkor egybemenetű–egykimenetű (**SISO**) rendszerről van szó, ami a **MIMO** rendszernek egy speciális esete. A rendszerek hatásvázlatait a 4. ábra mutatja.

A **MIMO** rendszer paramétermátrixai ún. illeszkedő mátrixok: $B(n\times j)$, $C(k\times n)$, $D(k\times j)$; a **SISO** rendszer paramétermátrixai: $B(n\times1)$ oszlopvektor, $C(1\times n)$ sorvektor, $D(1\times1)$ skaláris. Az $\boldsymbol{A}(n\times n)$ állapotmátrix mindkét esetben négyzetes, $n$ a rendszer rendszáma és $n\geq1$. Az $u$ bemenő- és az $y$ kimenőjelek közötti kapcsolatot az $s$ operátortartományban az $\boldsymbol{y}(s)=\boldsymbol{W}(s)\boldsymbol{u}(s)$ algebrai egyenlet írja le[8]. A következőkben a **MIMO** tag stabilitását, állapotegyenletének megoldását tárgyaljuk, de a fenti megszorításokkal a kapott eredmények a **SISO** tagra is érvényesek. A $dx(t)/dt=Ax(t)+Bu(t)$, $y(t)=Cx(t)+Du(t)$ állapotegyenlet megoldása az $s$ *Laplace* operátortartományban az $x$ állapotváltozók $x(0)=0$ kezdeti értékei mellett:

$$
\begin{aligned}
x(s) &= (sI-A)^{-1}B\,u(s)=\phi(s)Bu(s)\\
y(s) &= \left[C(sI-A)^{-1}B+D\right]u(s)=\\
&= \left[C\phi(s)B+D\right]u(s)=W(s)u(s)
\end{aligned}
$$

és ebben

$$
W(s)=C(sI-A)^{-1}B+D=C\phi(s)B+D=
$$
$$
=\frac{C\,adj(sI-A)B+D\det(sI-A)}{\det(sI-A)}
$$

az átviteli mátrix.
A **MIMO**, ill. a **SISO** tagok esetében az átviteli mátrix, ill. az átviteli függvény:

MIMO $\quad (j>1,k>1,n\geq1):$

$$
y(s)=W(s)u(s)\quad\Leftrightarrow
$$
$$
\begin{bmatrix}y_1(s)\\y_2(s)\\ \\ y_k(s)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}W_{11}(s)&W_{12}(s)&\cdots&W_{1j}(s)\\W_{21}(s)&W_{22}(s)&\cdots&W_{2j}(s)\\ \vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\W_{k1}(s)&W_{k2}(s)&\cdots&W_{kj}(s)\end{bmatrix}}_{\text{Átviteli mátrix W(s)}}\begin{bmatrix}u_1(s)\\ \vdots\\u_j(s)\end{bmatrix}
$$
$$
y_i(s)=W_{i1}(s)u_1(s)+\cdots+W_{il}(s)u_l(s)+\cdots+W_{ij}(s)u_j(s)=
$$
$$
=\frac{G_{i1}(s)u_1(s)+\cdots+G_{il}(s)u_l(s)+\cdots+G_{ij}(s)u_j(s)}{H(s)}
$$

SISO $\quad (j=1,k=1,n\geq1):$

$$
y(s)=W(s)u(s)=\frac{G(s)}{H(s)}u(s).
$$

A **MIMO** tag átviteli mátrixának $k\times j$ számú $W_{il}(s)=G_{il}(s)/H(s)=$ $=y_i(s)/u_l(s)$ átviteli függvényeleme van, ill. a **SISO** tag átviteli „mátrixa" az egyetlen $W(s)=G(s)/H(s)=y(s)/u(s)$ átviteli függvényből áll. Az átviteli függvények polinomok hányadosaként megjelenő algebrai törtek. Közös tulajdonságuk, hogy mindegyiknek a nevezője ugyanaz a $H(s)=det(sI–A)$ karakterisztikus polinom.

Az $u(t)=\delta(t)$ *Dirac*-delta vizsgálójelre adott $x(t)$ és $y(t)$ válaszok komponensei $r_i exp(p_i t)$ szerint lefutó időfüggvények. A rendszer aszimptotikusan stabilis, ha ezek $t\rightarrow\infty$ mellett az állapottér origójába tartanak. Miután $p_i$ a $H(s)$ karakterisztikus polinom gyöke, ezért az aszimptotikus stabilitás általános feltétele, hogy a gyökök mindegyikének valós része $real(p_i)<0$ legyen.

**Aszimptotikusan stabilis a lineáris dinamikus rendszer** (a lineáris jelátvivő tag), **ha** ***H(s)=det(sI–A)*** **karakterisztikus polinomja** ***Hurwitz*** ***polinom.*** Más megfogalmazásban: **aszimptotikusan stabilis a jelátvivő tag, ha** ***A*** **állapotmátrixának minden sajátértékére** ***real($\lambda_i$)<0*****.**

Megjegyzés
A $H(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n$ karakterisztikus polinom *Hurwitz* polinom (vagyis mindegyik $p_i$ gyöke az $s$ komplex sík negatív valós részű félsíkján van), ha minden $a_i$ együttható *azonos előjelű*, az együtthatókból képzett $n$ méretű *Hurwitz* determináns $H_\Delta>0$, valamint ennek főátlójára támaszkodó minden aldeterminánsa $H_{\Delta i}>0$ (*Hurwitz* stabilitási kritérium[9]).

---

[8] A **MIMO** tagnál a **W**(s) átviteli mátrix $k\times j$ számú átviteli függvény elemet tartalmaz (a $W_{il}(s)=G_{il}(s)/H(s)$ elem azt mutatja meg, hogy az $y_i$ sorszámú kimenőjel *Laplace* transzformáltjának $W_{il}(s)u_l(s)$ $l$-dik komponense miként függ az $u_l$ sorszámú bemenőjel *Laplace* transzformáltjától). Az átviteli mátrix a **SISO** tag esetében az egyetlen elemű $W(s)=G(s)/H(s)$ átviteli függvényre egyszerűsödik. Az $n=1$ esetben a rendszer elsőrendű, ekkor az állapotmátrix skaláris ($A=a$).

[9] A *Hurwitz* kritérium a $H(s)=det(s\boldsymbol{I}–\boldsymbol{A})=0$ karakterisztikus egyenlet gyökei valós részének előjeléről *a gyökök tényleges meghatározása nélkül* tesz megállapításokat. Magas fok-

Részletezve:

$$\det(sI - A) = H(s) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$H(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n \Big|_{s=p_i} = 0$$

*Hurwitz-kritérium* : $H(s)$ *Hurwitz-polinom*
(*vagyis* $H(s)$ $p_i$ *gyökeire* $\mathrm{real}(p_i) < 0$), *ha*

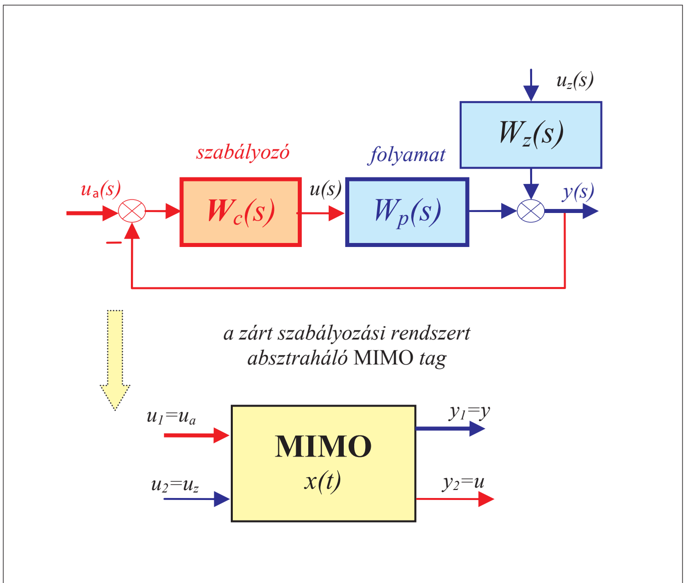
$$a_i > 0;\ H_\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} > 0;\ H_{\Delta i} > 0$$

Ha a rendszer *aszimptotikusan stabilis* – vagyis $H(s)=\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$ karakterisztikus polinomja *Hurwitz*-polinom –, akkor az állandó értékű $u(t)=u_0$ bemenőjelre (a tranziensek „lecsengését" követően, elvileg a $t=\infty$ időpontban) a rendszer $x(\infty)=x_0=$*állandó* állapotváltozóval és $y(\infty)=y_0=$*állandó* kimenőjellel egyensúlyi helyzetbe kerül. Ekkor a $dx(t)/dt|_{t=\infty}$ állapotsebesség értéke zérus, és ezért az egyensúlyi pont koordinátái:

$$0=Ax(\infty)+Bu_0 \rightarrow x(\infty)=x_0=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}u_0$$
$$y(\infty)=Cx(\infty)+Du_0 \rightarrow y(\infty)=y_0=(-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D})u_0$$

## A lineáris szabályozási rendszer stabilitása

A szabályozási rendszer egyszerűsített hatásvázlata az 5. ábrán látható.




*5. ábra A szabályozás egyszerűsített hatásvázlata*

*Bemenőjel* az $u_a$ alapjel és az $u_z$ zavarójel, *kimenőjelnek* vegyük fel az $y$ szabályozott jellemzőt és az $u$ irányítójelet. Ebben az értelemben a zárt rendszert két bemenő- és két kimenőjelű **MIMO** tag írja le ($j=k=2$). Ha a szabályozó és a folyamat alrendszereit a $W_c(s)=G_c(s)/H_c(s)$, $W_p(s)=G_p(s)/H_p(s)$, $W_z(s)$ átviteli függvényekkel jellemezzük, akkor a kimenőjelek transzformáltjainak függése a bemenőjelek transzformáltjaitól a hatásvázlat alapján:

$$y(s) = \frac{W_0(s)}{1+W_0(s)}\left[ \quad u_a(s) + \frac{W_z(s)}{W_0(s)} u_z(s) \right]$$
$$u(s) = \frac{W_0(s)}{1+W_0(s)}\left[ \frac{1}{W_p(s)} u_a(s) - \frac{W_z(s)}{W_p(s)} u_z(s) \right].$$

Mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \frac{W_0(s)}{1+W_0(s)} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{W_z(s)}{W_0(s)} \\ \dfrac{1}{W_p(s)} & -\dfrac{W_z(s)}{W_p(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a(s) \\ u_z(s) \end{bmatrix}.$$

Ebben $W_0(s)=W_c(s)W_p(s)=y(s)/h(s)$ a **nyitott kör**, $W_R(s) = W_0(s)/[1+W_0(s)]=y(s)/u_a(s)$ pedig a **zárt kör** eredő átviteli függvényei:

$$W_0(s) = W_c(s)W_p(s) = \frac{G_c(s)}{H_c(s)}\frac{G_p(s)}{H_p(s)} = \frac{G_0(s)}{H_0(s)}$$
$$W_R(s) = \frac{W_0(s)}{1+W_0(s)} = \frac{G_0(s)}{H_0(s)+G_0(s)} = \frac{y(s)}{u_a(s)}.$$

A zárt szabályozási rendszer stabilitását megszabó karakterisztikus egyenlet:

$$1+W_0(s)=0 \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{G_0(s)}{H_0(s)}=0 \quad \Rightarrow$$
$$H_0(s)+G_0(s)=0.$$

Megjegyzés:
A *folyamat* stabilitását a $H_p(s)=0$ $p_p$ gyökei, a *szabályozó* stabilitását a $H_c(s)=0$ $p_c$ gyökei, a *nyitott kör* stabilitását a $H_0(s)=H_p(s)H_c(s)=0$ karakterisztikus polinomok $p_c$, $p_p$ gyökei szabják meg. Ezzel szemben a *zárt rendszer* stabilitását meghatározó

$$\boldsymbol{H}_R(s)=H_0(s)+G_0(s)=\boldsymbol{H}_c(s)\boldsymbol{H}_p(s)+\boldsymbol{G}_c(s)\boldsymbol{G}_p(s)=0$$

karakterisztikus egyenlet $p_R$ gyökökkel rendelkezik, de ezek *nem azonosak* a $p_c$ és $p_p$ gyökökkel**.**

Az elméleti előkészítést követően a folytatásban sorra veszszük a lineáris szabályozási rendszer stabilitási kritériumait. Elsőként a *Hurwitz*, majd a *Nyquist* stabilitási kritériumokat ismertetjük.

*(Folytatjuk!)*

**szbela@iit.bme.hu**
**juhaszne@iit.bme.hu**

szám esetében tehát a gyökök meghatározása nélkül eldönthető az a kérdés, hogy van-e pozitív valós résszel rendelkező gyök? Ha van, akkor a $H(s)=0$ karakterisztikus egyenletével jellemzett dinamikus *rendszer labilis*. A $H(s)=0$ egyenlet gyökeinek analitikus megoldására $n\leq 4$ esetében van ún. megoldóképlet.