

Szabályozástechnika - 13.

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencé

A frekvenciafüggvény ábrázolásának Nyquist helygörbével történő módszere lineáris törtfüggvény és holtidős tagok esetén speciális tulajdonságokkal bír. Az ábrázolás Bode diagramra alapozott eljárása az átviteli függvény aszimptotikus közelítésén alapul. A számított frekvenciafüggő átviteli tulajdonságok megfelelő eszközháttérrel kísérletileg is meghatározhatók.

A lineáris törtfüggvény

Általános esetben $W(j\omega)$ m fokszámú számlálóval és n fokszámú nevezővel rendelkező algebrai tört, ezért a képfüggvény meghatározása nem egyszerű. Kivételt képez ez alól a **lineáris törtfüggvény**¹, ekkor ugyanis

$$W(s) = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{g_0 s + g_1}{h_0 s + h_1} \Rightarrow$$

$$W(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{H(j\omega)} = \frac{g_0 j\omega + g_1}{h_0 j\omega + h_1} = \frac{g_0 h_0 \omega^2 + g_1 h_1}{(h_0 \omega)^2 + h_1^2} + j\omega \frac{(g_0 h_1 - g_1 h_0)}{(h_0 \omega)^2 + h_1^2} = \text{real}W(j\omega) + j\text{imag}W(j\omega)$$

$$W(j\omega) = \text{abs}W(j\omega)e^{j\text{arc}W(j\omega)} = \sqrt{\frac{g_0^2 \omega^2 + g_1^2}{h_0^2 \omega^2 + h_1^2}} e^{j(\arctg \frac{g_0 \omega}{g_1} - \arctg \frac{h_0 \omega}{h_1})} = a(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

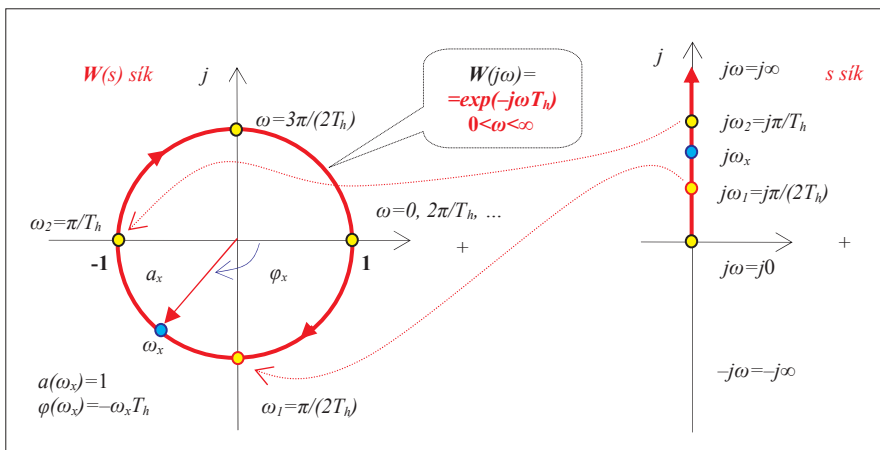
A lineáris törtfüggvény által létesített leképezés „**körtartó**”, ami azt jelenti, hogy az s síkon lévő kör képfüggvénye a $W(s)$ síkon szintén kör. Mivel az s sík $s=j\omega$ ($-\infty < \omega < \infty$) képzetes tengelye egy végtelen sugarú körként értelmezhető, a lineáris törtfüggvény által létesített $W(j\omega)$ képfüggvénynek is körnek kell lennie.

Holtidős tag Nyquist helygörbéje

Különös fontossággal bír a holtidős tag tulajdonságait leíró $W(j\omega)$ frekvenciafüggvény. A $W(j\omega)$ most is a transzcendens $W(s)$ -ből $s=j\omega$ helyettesítéssel származtatható:

$$W(s) = e^{-sT_h} \Rightarrow W(j\omega) = e^{-j\omega T_h} \Leftrightarrow a(\omega) = 1 \quad \varphi(\omega) = -\omega T_h$$

1. ábra A $W(s)=\exp(-sT_h)$ átviteli függvényű, holtidős tag Nyquist helygörbéje



A $W(j\omega)=\exp(-j\omega T_h)$ frekvenciafüggvény egy egységsugarú kör egyenlete, ezért a Nyquist helygörbe (az s -sík képzetes tengelyének képe) kör, lásd 1. ábra.

A Nyquist helygörbéből látható, hogy az egységnyi átviteli tényezővel rendelkező holtidős tag minden körfrekvenciájú jelet egységnyi amplitúdóval enged magán keresztül: $a(\omega)=1$ (mindent átérésztő szűrő). A kimenőjel és a bemenőjel közötti fáziseltolási szög ezzel szemben az ω körfrekvencia $\varphi(\omega)=-\omega T_h$ szerinti lineáris függvénye. Miközben a körfrekvencia befutja a $0 < \omega < \infty$ intervallumot, a $W(j\omega)$ helygörbe végtelen sokszor körbejárja a $W(s)$ sík origóját.

A $W(s)=\exp(-sT_h)$ átviteli függvény elsőfokú Pade² és k fokszámú Strejc közelítésének lehetséges alakjai:

$$W(s) = e^{-sT_h} \cong \frac{2 - sT_h}{2 + sT_h} = \frac{1 - s \frac{T_h}{2}}{1 + s \frac{T_h}{2}} \quad W(s) = e^{-sT_h} \cong \frac{1}{(1 + s \frac{T_h}{k})^k}$$

A $W(j\omega)$ frekvenciafüggvény ábrázolásának további lehetőségei az $a(\omega)=\text{abs}W(j\omega)$, $\varphi(\omega)=\text{arc}W(j\omega)$, ill. a $\text{re}(\omega)=\text{real}W(j\omega)$, $\text{im}(\omega)=\text{imag}W(j\omega)$ függvényeknek Descartes-koordináta rendszerben történő megadása. Ezek egyenértékűek a Nyquist-diagram ismeretével.

Labilis rendszerekre is értelmezhető az átviteli függvényhez rendelhető $W(j\omega)$ frekvenciafüggvény, de ilyen esetben – miután a rendszer az $u(t)=u_{\max} \sin(\omega t)$ harmonikus gerjesztésre minden határon túl növekvő $y(t)$ kimenőjellel válaszolna – a $W(j\omega)$ frekvenciafüggvénynek matematikai jelentés adható³.

A Bode diagram

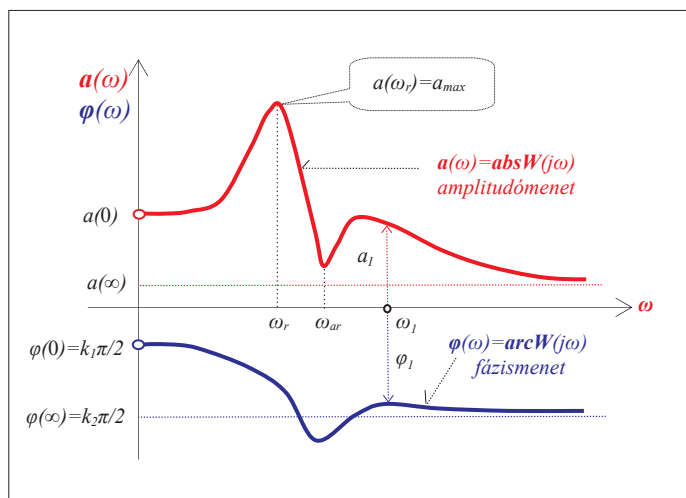
A Nyquist helygörbe polárdiagramban adja meg az $a(\omega)$ hosszúságú és $\varphi(\omega)$ fázisszögű vektorok végpontjainak mértani helyét, miközben az ω körfrekvencia befutja a $-\infty < \omega < \infty$ intervallumot. Ebből fizikai jelentése a

¹ Lineáris törtfüggvény esetén a tag elsőrendű differenciálegyenletének általános alakja: $h_1 dy(t)/dt + h_2 y(t) = g_1 du(t)/dt + g_2 u(t)$.

² A Pade közelítésnek léteznek magasabb fokszámmal rendelkező kifejezései is.

³ A labilis tagok $W(j\omega)$ frekvenciafüggvényének matematikai jelentése a Nyquist stabilitáskritérium alkalmazásánál kerül felhasználásra.

$0 < \omega < \infty$ intervallumnak van, az ebben értelmezett $a(\omega)$ és $\varphi(\omega)$ értékek azt mutatják meg, hogy az önbeálló lineáris jelátviteli tag – mint a harmonikus bemenőjeleket szűrő dinamikus rendszer – milyen frekvenciaátviteli tulajdonsággal rendelkezik. A szűrőkarakterisztika⁴ igen változatos lehet, Descartes-koordináta-rendszerben megjelenő jellegzetes alakját a 2. ábra mutatja.



2. ábra Egy jellegzetes $a(\omega)$ és $\varphi(\omega)$ karakterisztika Descartes-koordináta-rendszerben

A stabilis lineáris rendszerek frekvenciafüggvényének $a(\omega)$ amplitúdókarakterisztikái adott ω_r körfrekvenciáknál rezonancia (kiemelés), vagy ω_{ar} körfrekvenciánál antirezonancia (elnyomás) jeleget mutathatnak, de általánosan jellemző tulajdonságuk, hogy a nagyfrekvenciás jeleket elnyomják: $a(\omega)_{\omega \rightarrow \infty} = a(\infty) = 0$. Mindez a fizikai rendszerek tehetetlenségi tulajdonságából származtatható. A $\varphi(\omega)$ fáziskarakterisztika jellegzetessége, hogy az $\omega = 0$, és az $\omega = \infty$ körfrekvenciákon felvett értéke a $\pm\pi/2$ radián egész számú többszöröse lehet⁵. Mindenesetre az *amplitúdó–körfrekvencia* karakterisztika a körfrekvenciának magas fokszámú hatványfüggvénye, a *fázis–körfrekvencia* karakterisztika pedig trigonometrikus kifejezéseket tartalmaz, ezért a frekvenciafüggvény ábrázolása – a lineáris törtfüggvény esetét kivéve – nehézkes. Ezen segít a Bode diagram használata, amelyben logaritmusos léptéket veszünk fel az amplitúdó és a körfrekvencia tengelyeken egyaránt. Ez az ábrázolás lehetőséget teremt arra, hogy a magas fokszámú hatványfüggvényeket egyenes szakaszokból álló törtvonallakkal (aszimptotákkal) közelítsük.

Az átviteli függvény időállandós normálalakjából kapjuk a frekvenciafüggvény időállandós normálalakját:

$$W(j\omega) = \frac{k}{(j\omega)^i} \frac{\prod_{l=1}^{m_1} (1 + j\omega\tau_l) \prod_{l=1}^{m_2} [1 + 2\mu_l\tau_{ol}j\omega + \tau_{ol}^2(j\omega)^2]}{\prod_{l=1}^{n_1} (1 + j\omega T_l) \prod_{l=1}^{n_2} [1 + 2\xi_l T_{ol}j\omega + T_{ol}^2(j\omega)^2]} e^{-\omega T_h}$$

Ebből az $a(\omega) = \text{abs}W(j\omega)$ amplitúdó–körfrekvencia függvény (amplitúdómenet), és a $\varphi(\omega) = \text{arc}W(j\omega)$ fázis–körfrekvencia függvény (fázismenet) közvetlenül felírható:

$$a(\omega) = \text{abs}W(j\omega) = \frac{k}{(\omega)^i} \frac{\prod_{l=1}^{m_1} \sqrt{1 + (\omega\tau_l)^2} \prod_{l=1}^{m_2} \sqrt{(1 - \tau_{ol}^2\omega^2)^2 + (2\mu_l\tau_{ol}\omega)^2}}{\prod_{l=1}^{n_1} \sqrt{1 + (\omega T_l)^2} \prod_{l=1}^{n_2} \sqrt{(1 - T_{ol}^2\omega^2)^2 + (2\xi_l T_{ol}\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \text{arc}W(j\omega) = \sum_{l=1}^{m_1} \text{arctg}(\omega\tau_l) + \sum_{l=1}^{m_2} \text{arctg} \frac{2\mu_l\tau_{ol}\omega}{1 - \tau_{ol}^2\omega^2} - i \frac{\pi}{2} - \sum_{l=1}^{n_1} \text{arctg}(\omega T_l) - \sum_{l=1}^{n_2} \text{arctg} \frac{2\xi_l T_{ol}\omega}{1 - T_{ol}^2\omega^2} - \omega T_h$$

Az amplitúdómenetet⁶ a híradástechnikából átvett decibelben skálázva, az $a(\omega)_{dB} = 20 \log a(\omega)$ jelentősen egyszerűsödik, mivel a logaritmusképzés a szorzást összeadásra, a hányadost kivonásra egyszerűsíti:

$$a(\omega)_{dB} = 20 \log a(\omega) = 20[\log k + \sum_{l=1}^{m_1} \log \sqrt{1 + (\omega\tau_l)^2} + \sum_{l=1}^{m_2} \log \sqrt{(1 - \tau_{ol}^2\omega^2)^2 + (2\mu_l\tau_{ol}\omega)^2} - \sum_{l=1}^{n_1} \log \sqrt{1 + (\omega T_l)^2} - \sum_{l=1}^{n_2} \log \sqrt{(1 - T_{ol}^2\omega^2)^2 + (2\xi_l T_{ol}\omega)^2}]$$

Ha a decibelben mért amplitúdót olyan koordináta-rendszerben ábrázoljuk, amelyben az ω körfrekvenciára is logaritmusos léptéket használunk,⁷ akkor az $a(\omega)_{dB}$ grafikonjának négyzetgyökös tényezőit tartalmazó komponensei egyenes szakaszokkal közelíthetők, hiszen

$$20 \log \sqrt{1 + (\omega T)^2} = \begin{cases} 20 \log \sqrt{1} = 0 \text{ dB} & \omega T \ll 1 \\ 20 \log \sqrt{2} = 3 \text{ dB} & \omega T = 1 \\ 20 \log(\omega T) & \omega T \gg 1 \end{cases}$$

$$20 \log \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2} = \begin{cases} 20 \log \sqrt{1} = 0 \text{ dB} & \omega T \ll 1 \\ 20 \log 2\xi \text{ dB} & \omega T = 1 \\ 40 \log(\omega T) & \omega T \gg 1 \end{cases}$$

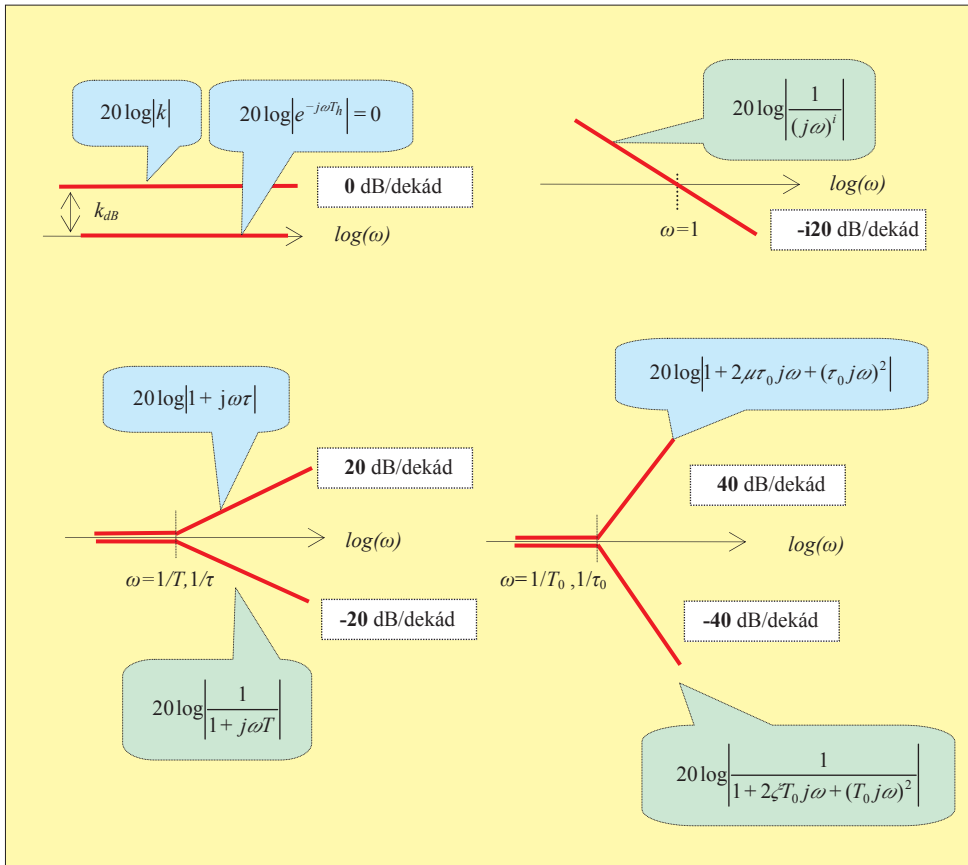
Az $a(\omega)_{dB}$ amplitúdómenet különféle komponensének aszimptotikus közelítései ennek megfelelően 0 dB/dekád, ± 20 dB/dekád, ± 40 dB/dekád, ± 20 dB/dekád meredekségű egyenesek, és ezek összegzésével áll elő a tényleges amplitúdómenet aszimptotikus közelítése. A közelítő egyenesek és a tényleges érték között a legnagyobb eltérés az $\omega = 1/T$ körfrekvenciájú töréspontokban van (± 3 dB, ill. $\pm 20 \log(2\xi)$ dB). A $\varphi(\omega)$ fázismenet komponensei vagy állandó értékek ($\pm\pi/2$ -nek egész számú többszörösei), vagy pedig *arctg*⁸ típusú trigonometrikus függvények.

Az amplitúdómenet komponenseinek aszimptotikus közelítéseit a 3. ábrán foglaltuk össze. Ezeket a vízszintes koordinátára a $\log(\omega)$ értéket visszük (vagy logaritmusos léptékben skálázunk), a függőleges koordinátán pedig az amplitúdót decibelben mérjük: $a_{dB} = 20 \log a$.

⁶ Az $a(\omega)$ és $\varphi(\omega)$ kifejezésekben már most figyeljünk fel arra, hogy a holtidős tényezőnek az amplitúdómenetre befolyása nincs, ezzel szemben a fázismenet holtidőből származó komponense $-\omega T_h$.

⁷ Ezen a skálán 1 dekád az a távolság, amelynél az ω körfrekvencia a 10-szeresére növekszik, vagy a tizedére csökken.

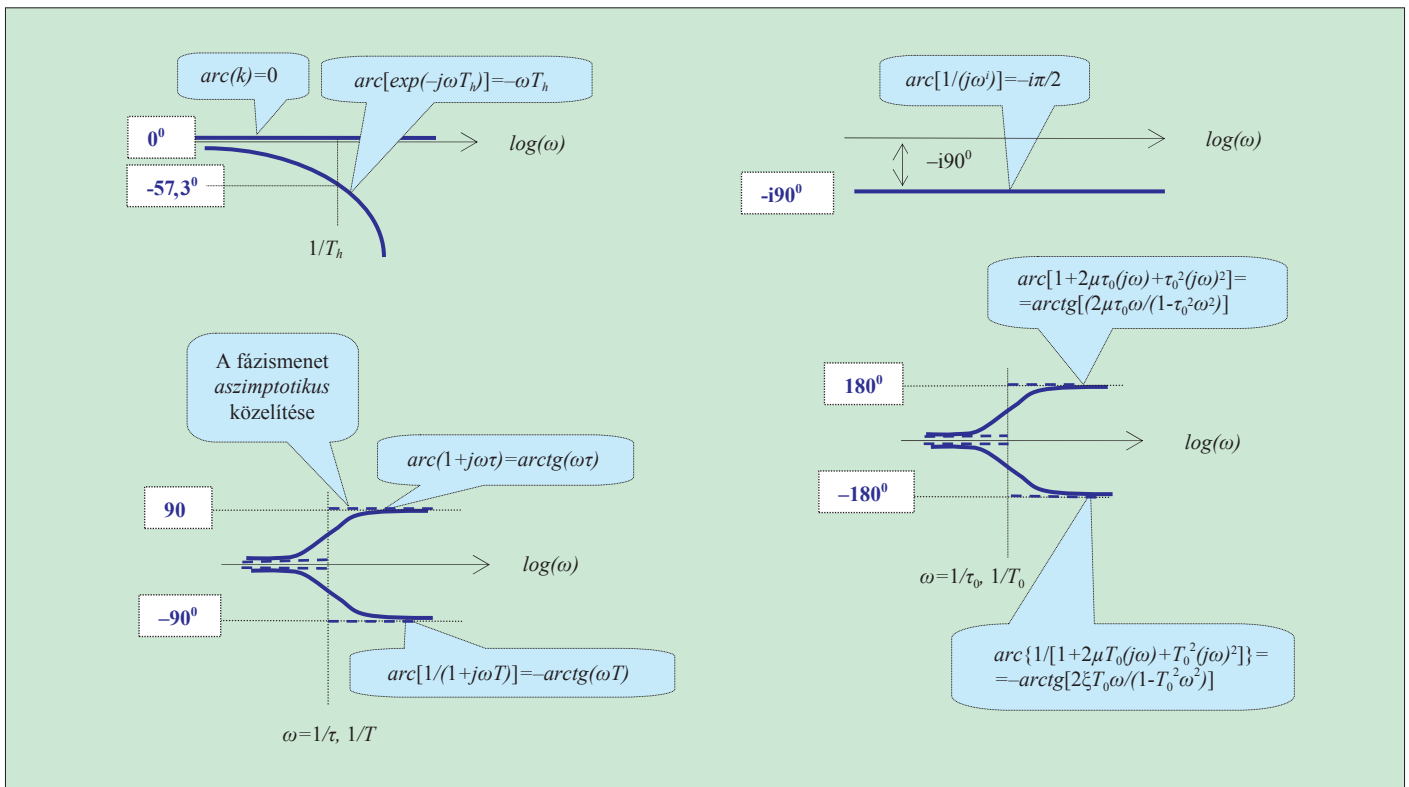
⁸ Az $\varphi = \text{arctg} \omega$ függvény főértéke a $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ között változik, miközben az ω független változó a $-\infty < \omega < \infty$ intervallumot futja be. Ha a frekvenciafüggvény $\exp(-j\omega T_h)$ holtidős tényezőt is tartalmaz, akkor a fázismenetnek $-\omega T_h$ komponense is van.



3. ábra A frekvenciafüggvény amplitúdómenet komponenseinek aszimptotikus közelítései

A fázismentet komponensei láthatóan a $\pm\pi/2$ radián egész számú többszöröseit, az \arctg trigonometrikus függvény komponenseit, ill. a holtidőből származó $-\omega T_h$ tényezőket tartalmazzák. A Bode diagram fázismentete a φ szöget szögfokban méri és értékét a $\log(\omega)$ függvényében ábrázolja. A fázisdiagram komponenseit a 4. ábra tartalmazza.

4. ábra A fázismentet komponensei és ezek aszimptotikus közelítései

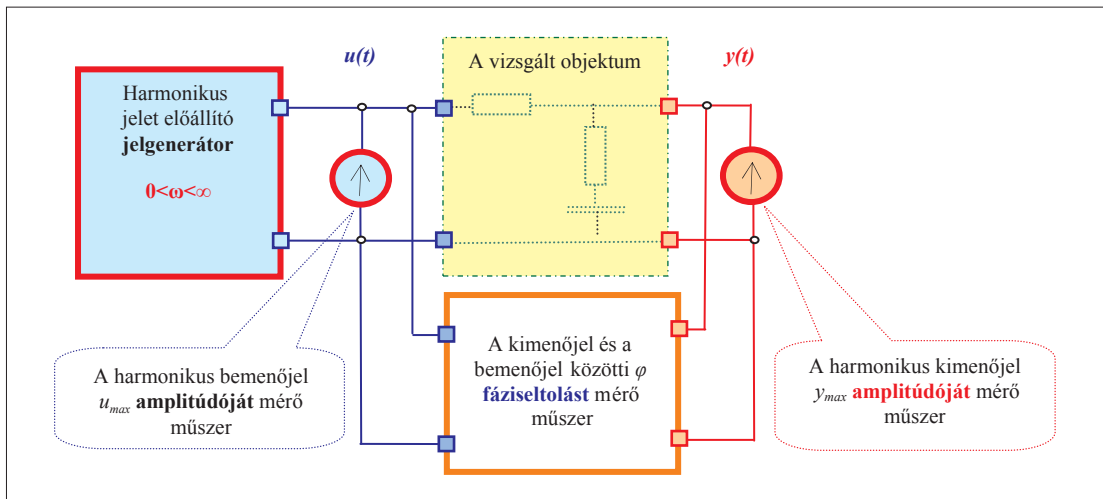


Megjegyzés:

A $W(s)$ átviteli függvény e^{-sT} holtidős tényezője az amplitúdómenetre semmiféle, a fázismentetre viszont lényeges befolyást gyakorol, mivel $\text{abs}[\exp(-j\omega T_h)] = 1$, $\text{arc}[\exp(-j\omega T_h)] = -\omega T_h$. A $-\omega T_h$ tényező az ω -nak ugyan lineáris függvénye, de mivel a Bode diagramon a fázisszöget $\log \omega$ függvényében ábrázoljuk, ezért a lineáris függvényt megjelenítő egyenes a logaritmikus lépték miatt „eltorzul”. A holtidő jelenléte az $\omega = 1/T_h$ körfrekvencián -1 radián ($-57,3^\circ$) fázisszög értékkel befolyásolná a holtidőmentes rendszer fáziseltolását. Ennek akkor van meghatározó jelentősége, ha $W(s) = W_0(s)$ a szabályozás felnyitott körének az eredő átviteli függvénye, és ennek ω_c vágási körfrekvenciája az $1/T_h$ -érték környezetére esik. Ilyenkor a holtidő jelenléte a zárt szabályozási rendszer stabilizálási problémáihoz vezethet.

A Bode diagramok közelítő, aszimptotikus felvázolását az a kényszer szülte, hogy az átviteli függvény magas fokszáma esetén a $W(j\omega)$ frekvenciafüggvény pontos meghatározása jelentős mértékben számításgé-

nyes. A számítástechnika által nyújtott lehetőségek mellett ma már nem szükséges a közelítések alapján dolgoznunk, ezért a szabályozás rendszertechnikai méretezésekor is a pontos frekvenciafüggvénnyel számolhatunk. Ennek ellenére a Bode diagramok aszimptotikus ábrázolásmódja a szemléltetés eszközeként továbbra is kiválóan hasznosítható.



5. ábra Mérési elrendezés a frekvenciafüggvény kísérleti meghatározására

A frekvenciafüggvény kísérleti meghatározása

Az önbeálló tagok $W(j\omega)$ frekvenciafüggvénye mérések sorozatával is meghatározható.⁹ A mérési eljárás lefolytatásához szükség van egy olyan harmonikus bemenőjelet előállító jelforrásra, amely széles frekvencia intervallumban képes állandó amplitúdójú, harmonikus jel szolgáltatására. A kísérlet elvi elrendezését¹⁰ az 5. ábra mutatja.

A jelgenerátoron be kell állítani egy adott f_1 [Hz] frekvenciaértéket ($\omega_1 = 2\pi f_1$ [rad/s]), valamint az objektumra kapcsolt

⁹ A $W(j\omega)$ frekvenciafüggvény kísérleti meghatározhatóságának elvi és gyakorlati jelentősége van. Ennek ismeretében a többi rendszerjellemező függvény (a tag *differentiálegyenlete*, a *súlyfüggvénye*, az *átmeneti* függvénye és az *árviteli függvénye*) is meghatározható. Ez az eljárás a frekvenciafüggvény alapján végrehajtott **rendszer-identifikáció**. A szabályozó rendszertechnikai méretezése a nyitott kör $W_o(j\omega) = W_c(j\omega)W_p(j\omega)$ frekvenciafüggvénye alapján történik.

¹⁰ Ez a mérési elrendezés arra az esetre vonatkozik, amikor a vizsgált objektum bemenő- és kimenőjelei villamos egyenfeszültségek.

jel u_{max} amplitúdóját. Ezután meg kell várni a kvázistacioner állapot kialakulását, és ezt követően kell leolvasni a kimenőjelet $y_{max}(\omega_1)$ amplitúdóját, valamint a bemenőjelelhez viszonyított $\varphi_1(\omega_1)$ fáziseltolási szögét. Az $y_{max}/u_{max} = a_1(\omega_1)$ érték lesz az adott ω_1 körfrekvenciához tartozó $absW(j\omega_1)$, a $\varphi_1(\omega_1)$ pedig az $arcW(j\omega_1)$. A mérést a körfrekvencia különféle értékeinél ismételtelen el kell végezni a körfrekvencia olyan intervallumban, amely

a vizsgált objektum szempontjából meghatározó. A fáziseltolás mérésének igen egyszerű módszere (villamos feszültségek esetében) egy kétsugaras oszcilloszkópon az $u(t) = u_{max} \sin(\omega t)$ és $y(t) = y_{max} \sin(\omega t + \varphi)$ jelek időfüggvényeinek vagy a jelek által képzett *Lissajous*-görbének az ábrázolása.

Léteznek olyan – igencsak költségigényes – céleszközök és mérési eljárások is, amelyek a *Nyquist* helygörbét vagy az ennek megfelelő *Bode* diagramokat egyetlen „gombnyomásra” képernyőn, nyomtatott ábrán vagy táblázatos formában produkálják (spektrumanalizátorok).

(Folytatjuk!)

szbela@iit.bme.hu
juhaszne@iit.bme.hu