

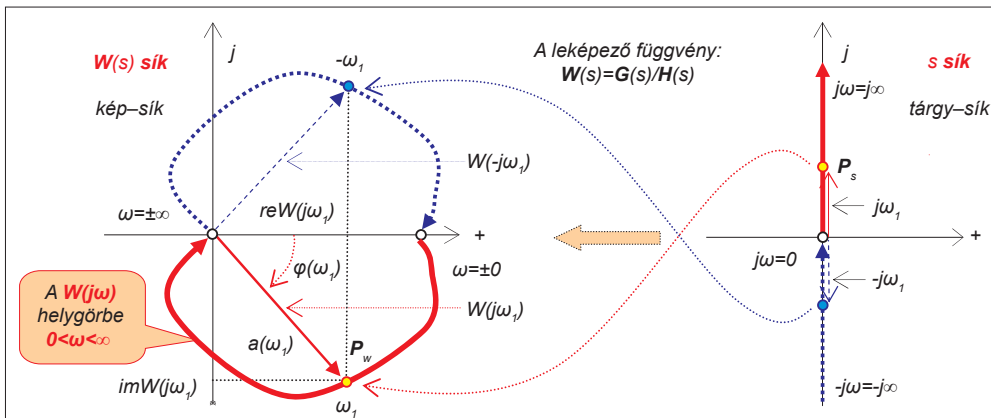
# Szabályozástechnika - 12.

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencé

Szabályozástechnikai sorozatunk következő része a frekvenciafüggvény ábrázolási technikái között elsőként a Nyquist helygörbe módszerét mutatja be, ízelítőt adva abból is, hogyan járul hozzá a MATLAB-program az eredmények szemléletes megjelenítéséhez.

## A Nyquist helygörbe származtatása konformis<sup>1</sup> leképzéssel

Az ábrázolás egyik formája a komplex számsíkon ábrázolt Nyquist-helygörbe. Ezt a helygörbét egy olyan képfüggvénynek tekinthetjük, ahol a tárgyfüggvény az  $s$  sík  $s=j\omega$  pozitív képzetes tengelye, amit a  $W(s)$  függvény által meghatározott kifejezés a  $W(s)$  síkra képez le. A  $W(s)$  síkon az  $s$  sík  $s=j\omega$  pozitív képzetes tengelyének képe a  $W(j\omega)$  Nyquist diagram. Ábrázolása az 1. ábrán látható.



1. ábra. Az  $s$  sík imaginárius tengelyének leképezése a  $W(s)$ -síkra

Ha az  $s$  sík képzetes tengelyének minden  $j\omega$  értékére meghatározzuk az  $a(\omega)$  hosszúságú és  $\varphi(\omega)$  szögű, komplex  $W(j\omega)$  vektort (vagy az  $s$  sík  $P_s$  pontjának képét a  $W(s)$  síkon: a  $P_w$  képpontot), akkor e vektorok végpontjainak mértani helye – miközben az  $\omega$  körfrekvencia befutja a  $0 < \omega < \infty$  intervallumot – a **Nyquist helygörbe**<sup>2</sup>. Ennek ismerete felvilágosítást ad arról, hogy az aszimptotikusan stabilis tag a különféle körfrekvenciájú, harmonikus jeleket kvázistacioner állapotban milyen „amplitúdótorzítással”, ill. milyen „fázistorzítással” engedi magán keresztül<sup>3</sup>. A  $W(j\omega)$  helygörbe leírja, hogy a jelátvivő tag – mint a harmonikus jeleket **szűrő** dinamikus rendszer – milyen viselkedést mutat, milyen frekvenciaintervallumokban végez „kiemelést”, ill. milyen frekvenciaintervallumokban végez „elnyomást”.

Az ábrán az  $s$  sík negatív képzetes tengelyének ( $-\infty < \omega < 0$ ) képfüggvényét is ábrázoltuk. Ennek – mint majd később látjuk

1 Konformis leképezés: a  $W(s)$  komplex változós függvény az  $s$  komplex tárgy sík vektorait a  $W(s)$  képsík vektorába „viszi át”. Az  $s$  tárgy sík zárt görbéi a  $W(s)$  síkon is zárt görbe alakjában jelennek meg. A leképezés az  $s$  sík olyan pontjaira, amely pontokban  $W(s)$  szinguláris, nem értelmezhető, ezért az ilyen pontokat a  $s$  síkon felvett görbén egy  $\rho \rightarrow 0$  sugarú félkörrel (a szinguláris pont reguláris környezetében) meg kell kerülni. A  $W(s)=G(s)/H(s)$  átviteli függvény szinguláris pontjai a  $H(s)=0$  karakterisztikus egyenlet  $p_i$  gyökei, a rendszer pólusai.

2 A Nyquist helygörbére tett nyíl az  $\omega$  körfrekvencia növekedésének az irányát mutatja.

3 A „torzítás” itt azt jelenti, hogy az  $y$  harmonikus kimenőjel amplitúdója és fázisa miként változik a körfrekvencia függvényében.

– matematikai jelentés adható. Mivel az  $s$  sík  $-j\omega_1$  vektora a  $j\omega_1$  vektor konjugáltja, ezért a  $W(s)$  síkon  $W(-j\omega_1)=\text{conj}[W(j\omega_1)]$ . Ebből pedig az is következik, hogy a negatív imaginárius tengely képfüggvénye a pozitív imaginárius tengely képfüggvényének a valós tengelyre vett tükörképe. Vagyis a **teljes** – negatív körfrekvenciákra is kiterjesztett Nyquist helygörbe szimmetrikus a  $W(s)$  sík valós tengelyére. Fizikai rendszereket leíró frekvenciafüggvény – a rendszer tehetetlenségéből származó – tipikus tulajdonsága, hogy a nagyfrekvenciás jeleket „elnyomja”, ezért általában  $\text{abs}W(j\omega)_{\omega \rightarrow \infty} = a(\omega)_{\omega \rightarrow \infty} = 0$ . A következő példa – mintegy illusztrációként – egy RLC áramkört absztraháló tag frekvenciafüggvényének meghatározását tárgyalja. Hasonló elrendezések a mechanika, a hidraulika és a pneumatika szerkezeti megoldásaiból is választhatóak.

lajdonsága, hogy a nagyfrekvenciás jeleket „elnyomja”, ezért általában  $\text{abs}W(j\omega)_{\omega \rightarrow \infty} = a(\omega)_{\omega \rightarrow \infty} = 0$ . A következő példa – mintegy illusztrációként – egy RLC áramkört absztraháló tag frekvenciafüggvényének meghatározását tárgyalja. Hasonló elrendezések a mechanika, a hidraulika és a pneumatika szerkezeti megoldásaiból is választhatóak.

### Példa:

A 2. ábrán aszimptotikusan stabilis RLC áramkör kapcsolási vázlata, és átviteli függvénye<sup>4</sup> látható. A másodrendű rendszer  $W(s)$  átviteli

függvénye az áramkörök analízisében használt operátoros impedanciák alkalmazásával közvetlenül felírható.

Az RLC elemeket tartalmazó áramkör a  $T_\xi$ -lineáris lengő tagnak is egy szerkezeti illusztrációja, ha az átviteli függvényében szereplő  $\zeta$  csillapítási tényező a  $0 < \zeta < 1$  intervallumban van. Legyen ezért:

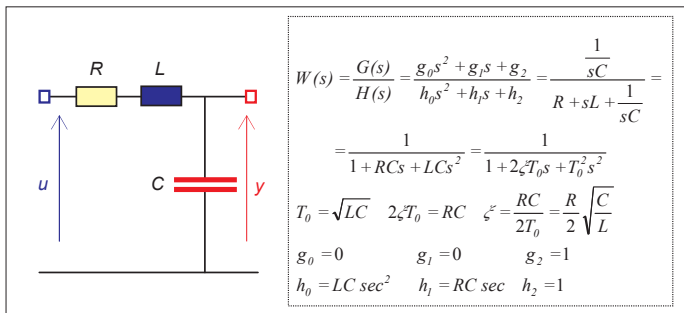
$$W(s) = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{1}{1 + 2\zeta T_0 s + T_0^2 s^2} = \frac{1}{1 + 0,2s + s^2} \quad (\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 0,1 \quad T_0 = \sqrt{LC} = 1 \text{ sec}).$$

- a. Adjuk meg a tag  $W(j\omega)$  frekvenciafüggvényét és ábrázoljuk ennek Nyquist helygörbéjét!
- b. A tag bemenetén zérus kezdeti feltételek mellett  $u(t)=2\sin(\omega t)=2\sin(t)$  bemenőjelet működtetünk (a bemenőjel amplitúdója  $u_{\max}=2$ , körfrekvenciája  $\omega=1$ ).
  - b1. Ábrázoljuk léptékhelyesen az  $y(t)$  kimenőjelet!
  - b2. Kvázistacioner állapotban adjuk meg az  $y(t)=y_{\max}\sin(\omega t + \varphi)$  kimenőjel  $\omega$  körfrekvenciáját,  $y_{\max}(\omega)$  amplitúdóját és a bemenőjelhez képesti  $\varphi(\omega)$  fáziseltolási szögét!

### Megoldás:

a.) A frekvenciafüggvény az átviteli függvényből közvetlenül felírható:

4 Az adott áramkör a két energiatároló tag áramköri illusztrációját reprezentálja.

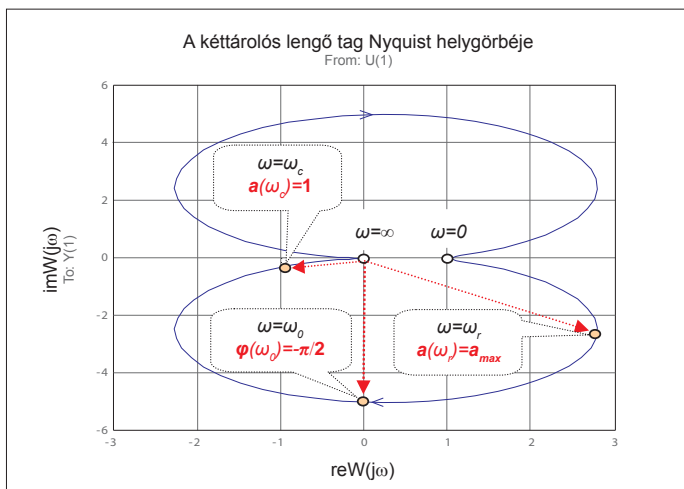


2. ábra. RLC áramkör kapcsolási vázlatja és átviteli függvénye

$$W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega} = \frac{G(s)}{H(s)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1+2\xi T_0(j\omega) + T_0^2(j\omega)^2} = \frac{1}{1+0,2(j\omega) + (j\omega)^2} = \frac{1}{1-\omega^2 + j0,2\omega}$$

A frekvenciafüggvényt MATLAB-támogatással számolva és ábrázolva (lásd 3. ábra):

```
G=1;H=[1 0.2 1];grid on;nyquist(G,H);
title('A kéttárolós lengő tag Nyquist helygörbéje');
xlabel('reW(jw)');ylabel('imW(jw)');
```



3. ábra. Kéttárolós lengő tag Nyquist helygörbéje ( $\zeta=0,1; T_0=1$ )

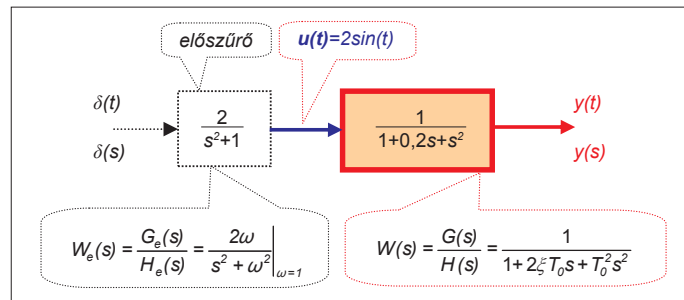
A helygörbéből látható, hogy miközben az  $\omega$  körfrekvencia befutja a  $0 < \omega < \infty$  intervallumot, az  $a(\omega) = |W(j\omega)|$  amplitúdónak az  $\omega_r$  körfrekvenciánál  $a_{max}$  maximuma van,  $\omega_0$ -nál  $\phi(\omega) = \text{arc}W(j\omega)$  szöge  $\phi(\omega_0) = -\pi/2$  és  $\omega_c$ -nél  $a(\omega_c) = 1$  ( $\omega_r = \sqrt{1-2\xi^2}/T_0$  a rezonancia körfrekvencia és  $a_{max} = 1/[2\xi\sqrt{1-\xi^2}]$ ). Továbbá  $\omega_0 = 1/T_0$  a csillapítatlan (természetes) saját körfrekvencia<sup>5</sup> és  $a(\omega_0) = 1/(2\xi)$ , valamint  $\omega_c = \sqrt{2(1-2\xi^2)}/T_0$  a vágási körfrekvencia és  $a(\omega_c) = 1$ . A kéttárolós, lengő tag mindezen jellegzetes  $\omega_r, \omega_0, \omega_c$  körfrekvencia értékei, ill. ezekhez a körfrekvenciákhoz tartozó  $a(\omega_r), a(\omega_0), a(\omega_c)$  amplitúdóértékek az

$$a(\omega) = \text{abs}W(j\omega) = \text{abs} \frac{1}{1+2\xi T_0 j\omega + T_0^2(j\omega)^2} = \frac{1}{\sqrt{(1-T_0^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T_0^2\omega^2}}$$

kifejezésből számíthatók.

b1. A tag bemenetén lévő  $u(t) = 2\sin(\omega t) = 2\sin(t)$  jelet úgy állítjuk elő, hogy egy  $W_e(s) = 2\omega/(s^2 + \omega^2) = 2/(s^2 + 1)$  átviteli függvényű előszűrő bemenetén  $L\{\delta(t)\} = 1$  jelet működ-tünk. A  $W_e$  átviteli függvényű előszűrő tag kimenetén

<sup>5</sup> A lengő tag  $v(t)$  átmeneti függvényében szereplő periodikus összetevő  $\omega = \sqrt{1-\xi^2}/T_0$  lengési körfrekvenciája a csillapított saját körfrekvencia. Az  $\omega_r$  rezonanciafrekvencia akkor létezik, ha  $0 < \xi < 1/\sqrt{2}$ .

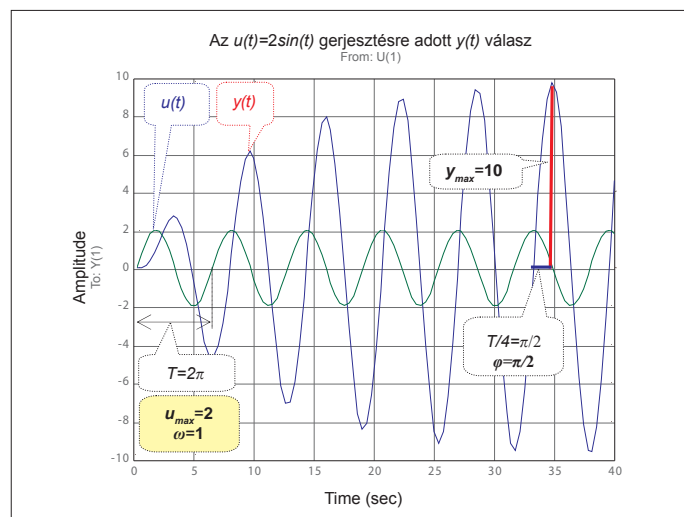


4. ábra. Az  $u(t) = 2\sin(t)$  jel előállítás és a vizsgált rendszer bemenetén történő működtetése

keletkező jel időfüggvénye ekkor:  $L^{-1}\{2\omega/(s^2 + \omega^2)\} = L^{-1}\{2/(s^2 + 1)\} = 2\sin(\omega t) = 2\sin(t)$ . Az így létrehozott rendszer hatásvázlatja  $\omega = 1$  figyelembevételével (lásd 4. ábra).

A rendszer  $y(t)$  kimenőjelét MATLAB-támogatással számítjuk és ábrázoljuk (lásd 5. ábra):

```
Ge=2;He=[1 0 1];grid on;impulse(Ge,He);hold on;
[Gy,Hy]=series(Ge,He,G,H);impulse(Gy,Hy)
```



5. ábra. A kvázistacioner állapot kialakulásának szemléltetése

Figyeljük meg, hogy a tranziensek „lecsengését” követően (elvéleg a  $t = \infty$  időpontban, gyakorlatilag a  $t \gg T_0$  időpont eltelte után) a harmonikus  $y(t)$  kimenőjel amplitúdója  $y_{max} = 10$ , a bemenőjelhez viszonyított fáziseltolási szöge  $\phi = -\pi/2$ .

b2. A bemenőjel körfrekvenciája  $\omega = 1$ . A rendszer lineáris, ezért a kimenőjel körfrekvenciája a kvázistacioner állapotban azonos a bemenőjel körfrekvenciájával, vagyis  $\omega = 1$ . A  $W(j\omega)$  frekvenciafüggvény értéke az  $\omega = 1$  körfrekvencián

$$W(j\omega)_{\omega=1} = \frac{1}{1+2\xi T_0 j + T_0^2 j^2} = \frac{1}{1-1+0,2j} = -5j$$

$$\text{abs}W(j\omega)_{\omega=1} = 5 \quad \text{arc}W(j\omega)_{\omega=1} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow -90^\circ$$

Ennek megfelelően  $y_{max} = a(\omega)u_{max} = 5 \cdot 2 = 10$ ;  $\phi = -\pi/2$  ( $-90^\circ$ ), tehát az  $u(t) = 2\sin(t)$ -re adott válasz a rendszer kvázistacioner állapotában  $y(t) = 10\sin(t - \pi/2)$ .

(Folytatjuk!)

szbela@iit.bme.hu  
juhaszne@iit.bme.hu

<sup>6</sup> Vegyük figyelembe, hogy a  $\sin(\omega t) = \sin(t)$  Laplace transzformálja  $L\{\sin(\omega t)\} = \omega/(s^2 + \omega^2) = 1/(s^2 + 1)$ .