Szabályozástechnika – 10.

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencné

A cikksorozat következő részében folytatjuk a dinamikus rendszer matematikai modelljének az elemzését a SISO-jelátvivő tag rendszerjellemző függvényeinek a vizsgálatával, majd rátérünk az átviteli függvény párhuzamos felbontására, végezetül pedig az alapmátrix meghatározására[1].

A domináns póluspár

Az egységnyi átviteli tényezővel (k=1) rendelkező kéttárolós, lengő tag ($\mathbf{T}_\xi$-tag) differenciálegyenlete és paraméterei:

$$h_0\frac{d^2y(t)}{dt^2}+h_1\frac{dy(t)}{dt}+h_2y(t)=g_2u(t)$$

$$h_0=T_0^2 \quad h_1=2\xi T_0 \quad h_2=1 \quad g_2=1$$

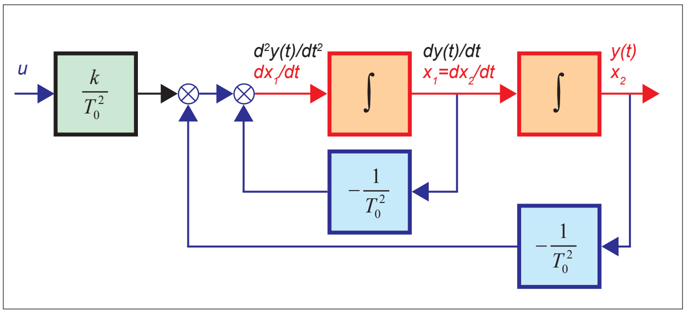
$$T_0^2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\xi T_0\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=u(t)$$

$$T_0>0 \quad 0\le\xi<1.$$

Szabályozástechnikai szempontból a $\mathbf{T}_\xi$-tagnak az a jelentősége, hogy bizonyos feltételek teljesülésekor a zárt szabályozási rendszer $u_a(t)$ alapjele és $y(t)$ szabályozott jellemzője között ilyen differenciálegyenlet írja le a jelátviteli viszonyokat. A $\mathbf{T}_\xi$-tag differenciálegyenlethez rendelhető, lineáris alaptagokat tartalmazó hatásvázlat felépítéséhez a differenciálegyenletet rendezzük a $d^2y(t)/dt^2$ kifejezésre, és ennek kétszeres integrálásával állítsuk elő az $y(t)$ kimenőjelet:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}=-\frac{2\xi}{T_0}\frac{dy(t)}{dt}-\frac{1}{T_0^2}y(t)+\frac{1}{T_0^2}u(t).$$

Figyelembe véve, hogy a $d^2y(t)/dt^2$ az integrátorok $dy(t)/dt$, $y(t)$ kimenőjeleiből és az $u(t)$ bemenőjelből „rakhatók össze", az alaptagokból felépített hatásvázlat is felépíthető (lásd 1. ábra).



1. ábra A $\mathbf{T}_\xi$-tag hatásvázlata

Az integráló tagok x_1, és x_2 kimenőjelei az állapotváltozók. Ezekkel a rendszer állapotegyenlete:

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=-\frac{2\xi}{T_0}x_1(t)-\frac{1}{T_0^2}x_2(t)+\frac{1}{T_0^2}u(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt}=x_1(t)$$

$$y(t)=x_2(t)$$

mátrix alakban:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2\xi}{T_0} & -\frac{1}{T_0^2}\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{T_0^2}\\0\end{bmatrix}u(t) \quad\Rightarrow\quad A=\begin{bmatrix}-\frac{2\xi}{T_0} & -\frac{1}{T_0^2}\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}\frac{1}{T_0^2}\\0\end{bmatrix}$$

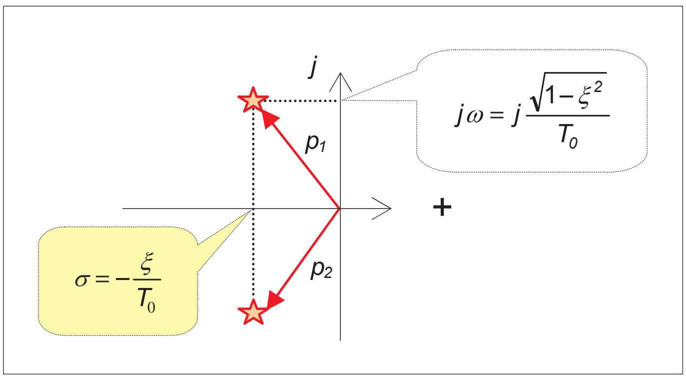
$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad C=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} \quad D=0.$$

A tag átviteli függvénye:

$$W(s)=\frac{G(s)}{H(s)}=\frac{1}{1+2\xi T_0s+T_0^2s^2}=\frac{y(s)}{u(s)}.$$

Ha a stabilis, zárt szabályozási rendszer $W_R(s)$ eredő átviteli függvényének pólus–zérus eloszlása olyan, hogy egy ún. $p_R=\sigma_R\pm j\omega_R$ ($\sigma_R<0$) domináló póluspáron kívül minden további pólus valós része $abs(\sigma_{Ri})>3abs(\sigma_R)$, akkor a zárt rendszer jelátviteli tulajdonságai – legalábbis közelítőleg – a kéttárolós, lengő tag tulajdonságaival jellemezhetőek. A kéttárolós, lengő tag ($\mathbf{T}_\xi$-tag) karakterisztikus egyenlete és ennek gyökei (lásd 2. ábra):

2. ábra A $\mathbf{T}_\xi$-tag karakterisztikus egyenletének gyökei (a domináns póluspár)



[1] A terjedelmi korlátok miatt a cikksorozatban nem szerepeltethető anyagrészek nem segítik az olvasót a megértés azonnali örömében. Ennek áthidalására az itt közölt tematikához kapcsolódóan egy elektronikusan letölthető anyagot is közreadunk. Ebben – a megértést támogató és az elmélyedést elősegítő igénnyel – részletes matematikai indoklásokkal, jelentős mértékű ábra- és példaanyag közlésével tárgyaljuk a cikksorozatban is közzétett ismereteket. A letölthető anyagok a ***www.ikma.bme.hu\ebook*** alatt találhatók. A szerzők szubjektív megítélése szerint a szabályozástechnika témáit – kellő részletességgel, igényes, de nem öncélú matematikai apparátussal, *számos gyakorlati példa részletes tárgyalásával* – feldolgozó legjobb művek egyikének szerzője *Benjamin C. Kuo.* Magyarul is megjelent kötete: **Önműködő szabályozási rendszerek** (Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1979), melyet az olvasó figyelmébe ajánljuk.

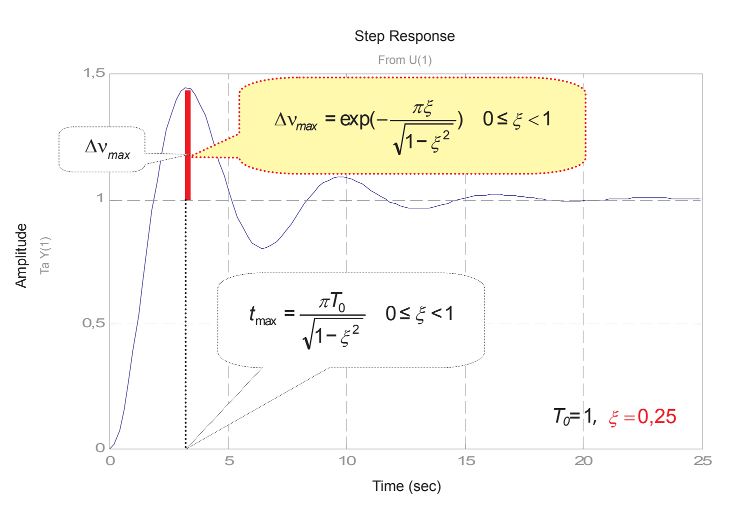
$$T_0^2 s^2 + 2\xi T_0 s + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = -\frac{\xi}{T_0} \pm \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{T_0} \quad T_0 > 0 \quad 0 \le \xi \le 1.$$

A tag *v(t)* átmeneti függvényét inverz *Laplace*-transzformációval számíthatjuk:

$$v(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{1+2\xi T_0 s + T_0^2 s^2}\frac{1}{s}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} \left[1 - \frac{e^{-\xi\frac{t}{T_0}}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\sqrt{1-\xi^2}\cos\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_0}t + \xi \sin\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_0}t\right)\right] & 0 \le \xi < 1 \\ \left[1 - \left(\frac{T_0 - t}{T_0}\right)e^{-\frac{t}{T_0}}\right] & \xi = 1 \end{array}\right\}.$$

Az átmeneti függvényt **MATLAB**-támogatással[2] ábrázolva a 3. ábrán láthatjuk:

```
[G,H]=ord2(1,0.25);grid on;step(G,H);
```



3. ábra A $\mathbf{T}_\xi$-tag átmeneti függvénye

Figyeljük meg, hogy a $\mathbf{T}_\xi$-tag *v(t)* átmeneti függvényének Δv_{max} túllendülése kizárólag a ξ csillapítási tényező függvénye. ξ=0 esetben ez a túllendülés Δv_{max}=1, és a rendszer *oszcillátorként* viselkedik. A hatásvázlaton a ξ=0 eset annak felel meg, amikor a két, egymással soros kapcsolást alkotó, integráló tag negatívan van visszacsatolva (vagyis a belső visszacsatolás a ξ=0 miatt hiányzik). A csillapítási tényezők különféle értékeihez tartozó súly és átmeneti függvényeket **MATLAB**-támogatással számítjuk, a 4. ábrán az átmeneti függvényeket mutatjuk, a súlyfüggvényeket a program futásával jeleníthetjük meg.

A kéttárolós, lengő tag átmeneti függvénye ξ=0 esetben csillapítatlan lengőmozgást végez, szemben a ξ=1 esettel, ami az *aperiodikus beállás* határesete. A csillapítatlan lengés periódusideje $T=2\pi T_0$, lengési körfrekvenciája $\omega_0=2\pi/T=2\pi/(2\pi T_0)=1/T_0$. ($\omega_0=1/T_0$ a $\mathbf{T}_\xi$-tag ún. csillapítatlan saját körfrekvenciája, a $\sqrt{(1-\xi^2)}/T_0 = \omega_0\sqrt{(1-\xi^2)}$ a csillapított, saját körfrekvencia.

Az átviteli függvény párhuzamos felbontása

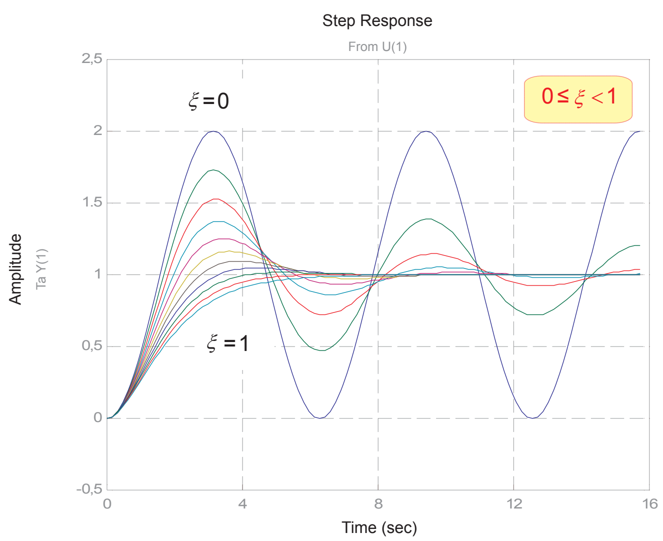
A $W(s)=G(s)/H(s)$ átviteli függvényű **SISO**-tag $u(t)=\delta(t)$ *Dirac*-impulzusra adott $y(t)=w(t)$ súlyfüggvény válasza – feltételezve, hogy a *H(s)* nevező minden p_i gyöke egymástól különböző, és $n>m$ – a *W(s)* részlettörtre bontásával[3], valamint annak figyelembevételével, hogy $u(s)=L\{\delta(t)\}=1$, egyszerűen számítható[4]:

$$y(s) = W(s)u(s) = W(s) = g_0\frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} =$$

$$= \left(\frac{r_1}{s-p_1} + \frac{r_2}{s-p_2} + \ldots + \frac{r_n}{s-p_n}\right) = w(s)$$

$$y(t) = L^{-1}\{w(s)\} = w(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i e^{p_i t} = r_1 e^{p_1 t} + r_2 e^{p_2 t} + \ldots + r_n e^{p_n t}.$$

```
k=1;T=1;
for i=0:10
    grid on;
    t=0:5*pi/100:5*pi;
    G=k;H=[T*T 2*i/10/T 1];
    impulse(G,H,t);hold on;
end
pause;clf;
for i=0:10
    grid on;
    t=0:5*pi/100:5*pi;
    G=k;H=[T*T 2*i/10/T 1];
    step(G,H,t);hold on;
end
```

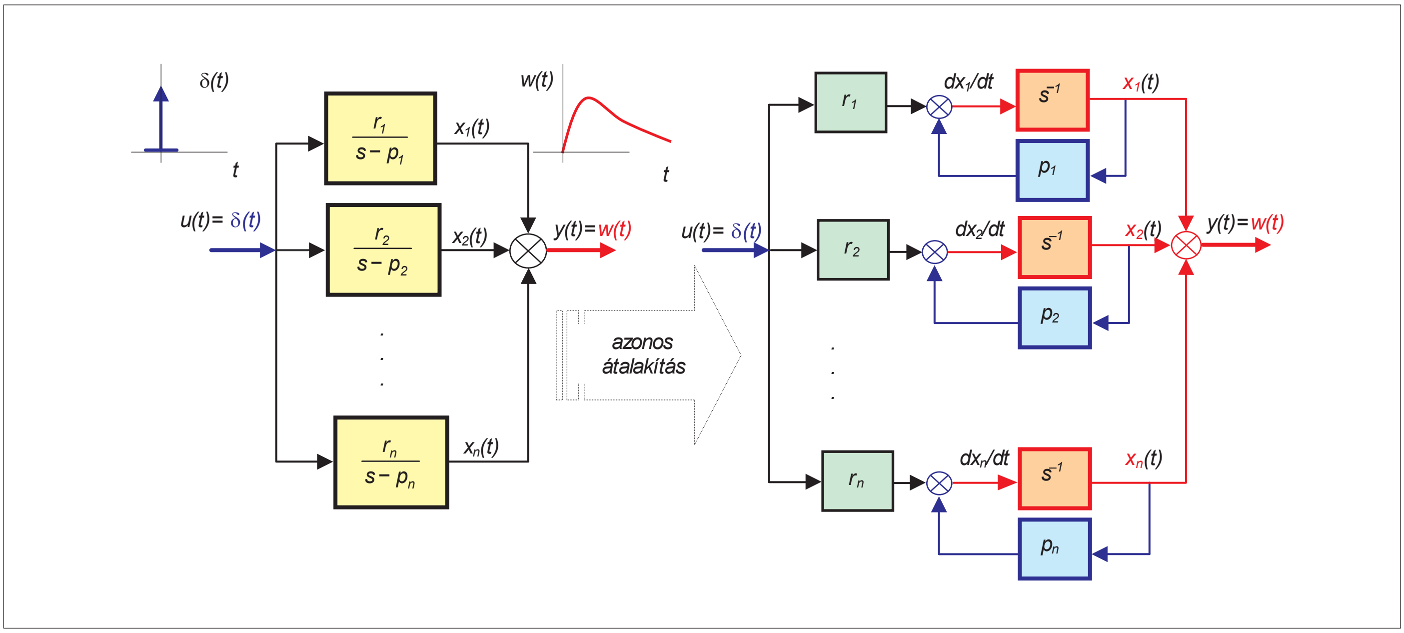


4. ábra A $\mathbf{T}_\xi$-tag átmeneti függvényei a ξ csillapítási tényező különféle értékeire

[2] A **MATLAB** `[G,H]=ord2(T,z)` függvénye a $G(s)/H(s)=1/[(sT)^2+2zTs+1]$ kéttárolós, lengő tagot definiálja.

[3] A részlettörtre bontást támogató **MATLAB**-függvény: `[r,p,k]=residue(G,H)`.

[4] Az átviteli függvény $W(s)=G(s)/H(s)$ algebrai tört. A z_i a $G(s)$=0 gyökei ($W(s)$ zérusai) és $W(z_i)$=0. A p_i a $H(s)$=0 gyökei ($W(s)$ pólusai) és $W(p_i)=\infty$. A $p_i=\sigma_i+j\omega_i$ és $p_{i+1}=\sigma_i-j\omega_i$ póluspárokat célszerű összevonva kezelni. $W(s)$–nek *m* számú zérusa és *n* számú pólusa lehet. Az $n–m$ a rendszer *pólustöbblete*, és általában $n–m\ge0$. Az adott részlettörtre bontásnál feltételeztük, hogy $n>m$, ami az átmeneti függvény $v(0)=0$ jelentésének felel meg.



5. ábra. Az átviteli függvény párhuzamos felbontása

A részlettörtre bontás eredményeként a $W(s)$ átviteli függvénynek a $r_i/(s–p_i)$ átviteli függvényű tagok[5] *párhuzamos* kapcsolásából felépített hatásvázlata hozható létre, amelyet tovább egyszerűsítve az egyes párhuzamosan kapcsolt részek **P, I** és **Σ** lineáris alaptagokból állíthatók elő (lásd 5. ábra).

Fontos tulajdonsága a *párhuzamos felbontás* alapján kapott struktúrának, hogy most a $H(s)$ karakterisztikus polinomnak nem a $-h_1, -h_2, \ldots, -h_n$ együtthatói, hanem a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gyökei játszanak meghatározó szerepet az integrátorok visszacsatolásaiban. A $W(s)$ átviteli függvényű tag stabilitása azt jelenti, hogy a bemeneten ható, egységnyi jelterületű *Dirac*-impulzus hatására a kimeneten megjelenő $y(t)=w(t)$ súlyfüggvénytől elvárjuk, hogy $t\to\infty$ mellett $w(t)\to 0$ legyen **(vagyis állandósult állapotban a tag a zérus bemenőjelre zérus kimenőjellel válaszoljon)**. A hatásvázlat alapján is szemléletesen látható, hogy $y(t)=w(t)$ a párhuzamosan kapcsolt tagok $x_i(t)$ részválaszaiból tevődik össze, és a $w(t)\to 0$ feltétel betartásához minden részválasznak is zérushoz kell tartania. Ez utóbbi akkor teljesül, ha a $H(s)$ nevező minden gyöke (a $W(s)$ minden p_i pólusa) az s komplex számsík negatív valós részű félsíkján van (mert $t\to\infty$ mellett az $re^{pt}\to 0$, ha $real(p)<0$, és ekkor az integráló tagok is *negatívan* vannak visszacsatolva). A párhuzamos felbontás alapján – állapotváltozóknak most is az s^{-1} átviteli függvényű, integráló tagok kimenő jeleit tekintve – felírható a **SISO**-tag állapotegyenletének *egy másik* alakja. A hatásvázlat jelöléseivel:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1(t)}{dt} &= p_1x_1(t) + r_1u(t)\\
\frac{dx_2(t)}{dt} &= p_2x_2(t) + r_2u(t)\\
&\vdots\\
\frac{dx_n(t)}{dt} &= p_nx_n(t) + r_nu(t)\\
y(t) &= x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_n(t)
\end{aligned},$$

vagy mátrix alakban:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & p_2 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & p_n\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} r_1\\ r_2\\ \vdots\\ r_n\end{bmatrix}}_{B}u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{[1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]}_{C}\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{D}u(t).$$

Az A állapotmátrix – a $W(s)$ párhuzamos (a *részlettörteken* alapuló) felbontásának eredményeként – most **diagonális**, főátlójában az egymástól különböző p_i sajátértékekkel. Az állapotegyenletnek ezt az alakját **első kanonikus alaknak** nevezzük[6]. Az integráló tagok száma most is azonos a rendszer n rendszámával, de ezek – ellentétben az irányíthatósági kanonikus alakhoz tartozó struktúrával – most *nem* soros kapcsolású *integrátorláncolatot*, hanem ***párhuzamos*** kapcsolást alkotnak.

Az $x(t)$ állapotváltozó időfüggvényeinek lefolyásából levonható következtetés: **az elsőrendű rendszer aszimptotikus stabilitása akkor biztosított, ha az integráló tag negatívan visszacsatolt,** vagyis $p<0$. A $W(s)=G(s)/H(s)$ átviteli függvény párhuzamos felbontása alapján igen szemléletesen jelenik meg a $H(s)=0$ karakterisztikus egyenlet p_i gyökeinek ($W(s)$ pólusainak) a jelentősége, mivel az integráló tagok visszacsatolásaiban ezeknek a pólusoknak a számértékei szerepelnek[7]. Ha

5 Az $f(s)=r/(s–p)$ operátorfüggvény $L^{-1}\{r/(s–p)\}=re^{pt}$ inverz transzformáltjának láthatóan alapvető jelentősége van az $y(t)$ időfüggvény meghatározásában. Célszerű ezért memorizálni: $L\{\boldsymbol{re^{pt}}\}=\boldsymbol{r/(s–p)}$, ill. $L^{-1}\{\boldsymbol{r/(s–p)}\}=re^{pt}$! Itt jegyezzük meg, hogy a $W(s)=\boldsymbol{k/(1+sT)}$ kifejezés $T>0$ mellett az *egytárolós arányos tag* (**T** tag) átviteli függvénye.

6 A $W(s)=G(s)/H(s)$ átviteli függvény ismeretében az állapotegyenlet kanonikus alakjának meghatározását támogató **MATLAB**-függvények: `[r,p,k]=`**`residue`**`(G,H)` vagy `[a,b,c,d]=`**`tf2ss`**`(G,H),→[A,B,C,D,T]=`**`canon`**`(a,b,c,d).` **Az első kanonikus alak akkor létezik, ha *W(s)* minden p_i pólusa egymástól különböző.** A közvetlen felbontásból származó *irányíthatósági kanonikus alak*, ill. a párhuzamos felbontásból származó *első kanonikus alak* más–más állapotváltozókkal írják le ***ugyanazt a folyamatot***, de az $u(t)$ bemenet és az $y(t)$ kimenet szempontjából egymással egyenértékűek (ha az állapotegyenletek azonos $W(s)$ átviteli függvényből származnak).

7 Ha valamelyik pólus komplex szám ($p_i=a+jb$), akkor ennek konjugált párja is pólusként van jelen a rendszerben ($p_{i+1}=a–jb$). Ekkor a konjugált komplex póluspárok összevonásával kell felépíteni a hatásvázlatot.

ezek valamelyike pozitív szám, az adott integráló tag *pozitívan visszacsatolt* részstruktúrát alkot, ami a teljes rendszer *labilitásának* is biztos jele.

Az alapmátrix meghatározása

Mint korábban láttuk, a $dx(t)/dt=Ax(t)+Bu(t)$ állapotegyenletnek van analitikus megoldóképlete, nevezetesen:

$$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau=\phi(t)x(0)+\int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau.$$

Ez a látszólag egyszerű megoldóképlet a mátrixalgebrai ismeretekben kevéssé jártas olvasónak azonban problémát jelenthet, mivel benne $\boldsymbol{\Phi(t)=e^{At}}$ *mátrix–exponenciális* kifejezések szerepelnek. Egy $n>1$ rendű rendszer esetében a rendszer sajátmozgása $x_s(t)=e^{At}x(0)$, ahol $x(0)$ az n számú kezdeti feltételt tartalmazó oszlopvektor, az e^{At} exponense pedig az $n\times n$ méretű At mátrixfüggvény:

$$x_s(t)=\begin{bmatrix}x_{s1}(t)\\ \vdots\\ x_{sn}(t)\end{bmatrix}=e^{At}x(0)=e^{\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\cdots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}t}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ \vdots\\ x_n(0)\end{bmatrix}=$$

$$=e^{\begin{bmatrix}a_{11}t&\cdots&a_{1n}t\\ \vdots&\cdots&\vdots\\ a_{n1}t&\cdots&a_{nn}t\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ \vdots\\ x_n(0)\end{bmatrix}=\phi(t)x(0).$$

A rendszer $\boldsymbol{\Phi(t)=e^{At}}$ **alapmátrixát**[8] legegyszerűbben a hatványsorával[9] értelmezhetjük, melynek alakja:

$$e^{At}=I+At+\frac{(At)^2}{2!}+\frac{(At)^3}{3!}+\dots=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(At)^i}{i!}=\begin{bmatrix}\varphi_{11}(t)&\cdots&\varphi_{n1}(t)\\ \vdots&\cdots&\vdots\\ \varphi_{n1}(t)&\cdots&\varphi_{nn}(t)\end{bmatrix}=\phi(t).$$

Láthatóan az **alapmátrix** olyan $n\times n$ számú elemet tartalmazó mátrixfüggvény, melynek minden $\varphi_{ij}(t)$ részeleme a t idő végtelen hatványsorával definiált. Ebből a hatványsorból nehezen ismerhető fel egy zárt alak, ezért elsősorban a mátrix–exponenciális értelmezésére vagy közelítő kiszámítására használjuk. A $\Phi(t)$ alapmátrix zárt alakban történő meghatározására többféle módszer létezik[10], egy egyszerű eljárás az inverz *Laplace*-transzformáción alapszik. A rendszer gerjesztéstől független sajátmozgásának *Laplace*-transzformáltja:

$$x_s(s)=L\{x_s(t)\}=(sI-A)^{-1}x(0)=\frac{adj(sI-A)}{det(sI-A)}x(0)=\phi(s)x(0)$$

$$\phi(s)=(sI-A)^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{det(sI-A)}=\begin{bmatrix}\varphi_{11}(s)&\cdots&\varphi_{n1}(s)\\ \vdots&\cdots&\vdots\\ \varphi_{n1}(s)&\cdots&\varphi_{nn}(s)\end{bmatrix}$$

és innen:

$$\phi(t)=L^{-1}\{\phi(s)\}=\begin{bmatrix}L^{-1}\{\varphi_{11}(s)\}&\cdots&L^{-1}\{\varphi_{n1}(s)\}\\ \vdots&\cdots&\vdots\\ L^{-1}\{\varphi_{n1}(s)\}&\cdots&L^{-1}\{\varphi_{nn}(s)\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi_{11}(t)&\cdots&\varphi_{n1}(t)\\ \vdots&\cdots&\vdots\\ \varphi_{n1}(t)&\cdots&\varphi_{nn}(t)\end{bmatrix}.$$

Különösen egyszerűen számítható a $\Phi(t)=e^{At}$ alapmátrix, ha az A állapotmátrix *diagonális*, főátlójában az egymástól különböző p_i sajátértékeivel[11]. Ekkor:

$$A=\begin{bmatrix}p_1&0&\cdots&0\\ 0&p_2&\cdots&0\\ 0&0&\vdots&0\\ 0&0&\cdots&p_n\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\phi(t)=e^{At}=\begin{bmatrix}e^{p_1t}&0&\cdots&0\\ 0&e^{p_2t}&\cdots&0\\ 0&0&\vdots&0\\ 0&0&\cdots&e^{p_nt}\end{bmatrix}.$$

Ismételten megjegyezzük, hogy a $W(s)$ átviteli függvény **párhuzamos** felbontása alapján meghatározható állapotegyenlet A állapotmátrixa **diagonális**, ami a számításokat jelentősen egyszerűsíti, miután az eredő rendszert elsőrendű rendszerek párhuzamos kapcsolásaként definiálja[12].

Példa:

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\ -2&-3\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad(sI-A)=s\begin{bmatrix}1&0\\ 0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1\\ -2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s&-1\\ 2&s+3\end{bmatrix}$$

$$\phi(s)=(sI-A)^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{det(sI-A)}=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}s+3&1\\ -2&s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{s+3}{s^2+3s+2}&\frac{1}{s^2+3s+2}\\ \frac{-2}{s^2+3s+2}&\frac{s}{s^2+3s+2}\end{bmatrix}$$

$$\phi(t)=L^{-1}\{\phi(s)\}=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\frac{s+3}{s^2+3s+2}&\frac{1}{s^2+3s+2}\\ \frac{-2}{s^2+3s+2}&\frac{s}{s^2+3s+2}\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t}&e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-21}&-e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}.$$

Ha A diagonális:

$$A=\begin{bmatrix}-1&0\\ 0&2\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad(sI-A)=s\begin{bmatrix}1&0\\ 0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&0\\ 0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+1&0\\ 0&s-2\end{bmatrix}$$

$$\phi(s)=(sI-A)^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{det(sI-A)}=\frac{1}{(s+1)(s-2)}\begin{bmatrix}s-2&0\\ 0&s+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{s-2}{(s+1)(s-2)}&0\\ 0&\frac{s+1}{(s+1)(s-2)}\end{bmatrix}$$

$$\phi(t)=L^{-1}\{\phi(s)\}=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)}&0\\ 0&\frac{1}{(s-2)}\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}L^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}&0\\ 0&L^{-1}\{\frac{1}{s-2}\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-t}&0\\ 0&e^{2t}\end{bmatrix}.$$

A folytatásban a tagok átmeneti függvényük szerinti csoportosításával, valamint a lineáris **SISO**-tag frekvenciafüggvényével foglalkozunk, majd rátérünk annak ábrázolására.

(Folytatjuk!)

szbela@iit.bme.hu
juhaszne@iit.bme.hu

8 A $\Phi(t)=e^{At}$ alapmátrixot *állapotátmeneti* mátrixnak, ill. *átmeneti* mátrixnak is nevezik.

9 Az e^{at} exponenciális függvény hatványsora: $e^{at}=1+at+(at)^2/2!+(at)^3/3!+\dots=\sum(at)^i/i!$ Esetünkben $at\rightarrow At$.

10 Ilyen módszer pl. az itt nem részletezett *Sylvester*-képlet. Irodalom: *Dr. Csáki Frigyes:* Fejezetek a szabályozástechnikából. Állapotegyenletek Akadémiai Kiadó, Budapest 1968.

11 Az átviteli függvény **párhuzamos** felbontása alapján – ha a p pólusok mindegyike egymástól különbözik – a **SISO**-tag állapotegyenletének mindig létezik olyan alakja, melyben az állapotmátrix **diagonális**. A közvetlen felbontásához az állapotegyenlet **irányíthatósági kanonikus alakja** *(integrátorok láncolata)*, a párhuzamos felbontásához pedig az ún. **első kanonikus alakja** *(integrátorok párhuzamos kapcsolása)* tartozik.

12 Ha $W(s)$ pólusainak egy része többszörös multiplicitású, az első kanonikus alak helyett egy nem diagonális, ún. Jordán-mátrix jellemzi a dinamikus rendszert.

IRODALOM: *Benjamin C. Kuo:* Önműködő szabályozások Műszaki Kiadó, Budapest 1979.