

Szabályozástechnika – 16.

Az elmélet egy alkalmazása. A szabályozás alrendszerének leírása.

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencé

A szabályozástechnika fogalmait, módszereit, szabályait tárgyaló cikksorozatot a következőkben egy gyakorlati példával illusztráljuk. A választás egy külső gerjesztésű, egyenáramú villamos motor fordulatszám-szabályozására esett, amelynek példáján keresztül alkalom nyílt a szabályozástechnikai analízis és a tervezés leglényegesebb kérdéseit alkalmazástechnikai szinten áttekinteni, a kapcsolódó számítástechnikai háttérrel bemutatni.

Bevezetés

Célunk az, hogy egy tényleges szabályozási rendszer **szervezeti** vázlatából kiindulva illusztráljuk a *folytonosidejű*, dinamikus rendszer egyes *alrendszerének* (a szabályozóberendezésnek és a szabályozott folyamatnak), valamint az alrendszerek együttműködésével keletkező *eredő, negatívan visszacsatolt, zárt szabályozási rendszer hatásvázlatának* a felépítését, különféle matematikai modelljeinek megalkotását, valamint ezek célirányos felhasználását¹. Megvizsgáljuk az egyes alrendszerek és az eredő, zárt rendszer **stabilitását**, kiszámítjuk adott (előzetesen felvett) determinisztikus alapjelre és zavarójelre vonatkozó válaszait. Az analízis során bemutatjuk az **állapotegyenletre**, ill. az **átviteli függvényekre** alapozott módszerek alkalmazásainak lehetőségeit. A frekvenciamódszerre alapozott szintézis keretei között méretezünk egy adott folyamatot működtető szabályozót. A tárgyalt példa egy elektromechanikai dinamikus rendszer (külső gerjesztésű, egyenáramú villamos motor) fordulatszám-szabályozása műveleti erősítővel létrehozott elektronikus **PI**-(arányos–integráló) szabályozóval. A folyamat, ill. a szabályozó egyszerű felépítése lehetőséget ad arra, hogy az alrendszerek matematikai modelljeit könnyen megalkothassuk, és ezt követően figyelmünket a szabályozástechnikai kérdések megválaszolására fókuszáljuk².

A matematikai modellek meghatározásakor a **SISO**-tag esetében a dinamikus rendszer n rendű, lineáris **differenciálegyenletének** (LDE) és $W(s)$ **átviteli függvényének**, a **MIMO**-tag esetében pedig a rendszer lineáris **állapotegyenletének** (LÁE) és $W(s)$ **átviteli mátrixának**³ alapján dolgozunk. A

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

¹ A következőkben tárgyalt témák feldolgozásához szükség van a *komplex számokkal* és a *mátrixokkal* megvalósuló alapműveletekre (összeadás, kivonás, szorzás, hányadosképzés, hatványozás, logaritmusképzés stb.). Ezek egy része többnyire közismert matematikai eljárás, más részük azonban – az elméleti kérdésekkel ritkán szembesülők számára – a „feladás homályába” vesztett. Ilyen lehet például egy $n \times n$ méretű négyzetes A mátrix $A^{-1} = \text{inv}(A)$ inverzének képzése, λ_i sajátértékeinek kiszámítása vagy az $a + jb = re^{j\theta}$ komplex szám hatványozása stb. Ajánlott irodalom: *Hütte: Mérnöki tudományok kézikönyve*, Springer Hungarica.

² Ebben az anyagrészen egy konkrét példát tárgyalunk ugyan, de az itt alkalmazott elveket és módszereket más folyamatok szabályozásánál is felhasználhatjuk. A példával illusztrált alkalmazások remélhetőleg meggyőzően indokolják az elméleti megalapozás erőfeszítéseit, és felhasználóbaráttá teszik a tárgyalt eljárásokat.

³ A **SISO**-tag a **MIMO**-tag speciális esete, az utóbbiban az $u(t)$ bemenőjelek száma $j > 1$, és az $y(t)$ kimenőjelek száma $k > 1$. (A **SISO**-tag esetében $j = k = 1$). A **MIMO**-tagot leíró $k \times j$ méretű $W(s)$ átviteli mátrix a **SISO**-tag esetében az egy elemet tartalmazó $W(s)$ átviteli függvényre egyszerűsödik. A lineáris rendszer n rendű, állandó együtthatójú, lineáris differenciálegyenlet **modellje** visszavezethető az n számú, elsőrendű differenciálegyenletből álló differenciálegyenlet rendszer – vagyis az állapotegyenlet – különféle speciális alakjaira.

állapotegyenlet adott $u(t)$ gerjesztésre és $x(0)$ kezdeti feltételre vonatkozó $x(t)$, $y(t)$ megoldásának meghatározását a *Laplace*-transzformáció alkalmazásával és gépi módszerek igénybevételével végezhetjük. A dinamikus rendszer állapotegyenletének $x(0) = 0$ kezdeti feltételre vonatkozó megoldása az s operátortartományban

$$\begin{aligned} x(s) &= (sI - A)^{-1} Bu(s) \\ y(s) &= [C(sI - A)^{-1} B + D] u(s) = W(s) u(s), \end{aligned}$$

ahol $W(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$ az átviteli *mátrix*. Az $x(t)$ állapotváltozók és az $y(t)$ kimenőjelek időfüggvényeit a t időtartományban inverz *Laplace*-transzformációval kaphatjuk:

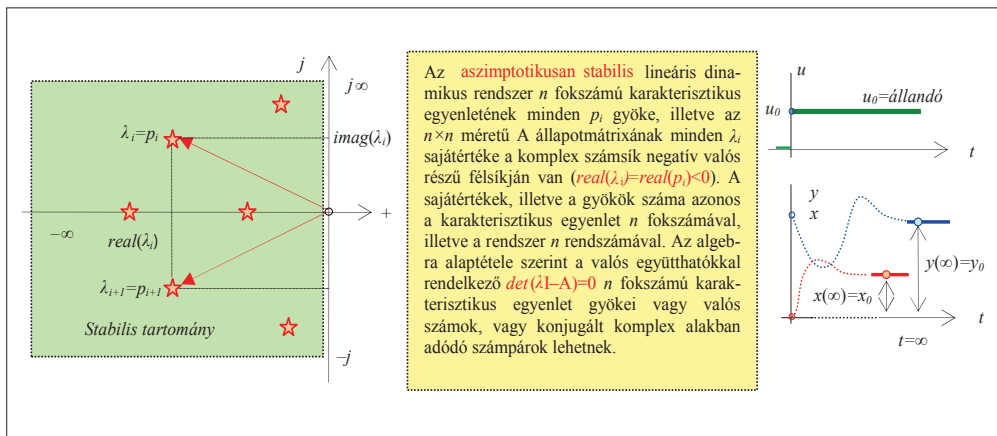
$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1} \{x(s)\} \\ y(t) &= L^{-1} \{y(s)\}. \end{aligned}$$

Ismételten és nyomatékosan hangsúlyozzuk, hogy az n rendű differenciálegyenletével vagy az n számú elsőrendű differenciálegyenletből felépülő állapotegyenletével leírt lineáris, dinamikus rendszer (vagy dinamikus jelátvivő tag) **aszimptotikus stabilitásának** feltétele, hogy a $H(s) = \det(sI - A) = 0$ n fokszámú, karakterisztikus egyenletek mindegyik p_i gyöke (más megfogalmazásban az n rendű rendszer A állapotmátrixának minden $p_i = \lambda_i$ sajátértéke) a komplex számsík negatív valós részű (stabilis) felsíkján legyen⁴ (1. ábra).

Az *aszimptotikusan stabilis* rendszerben $u(t) = u_0 = \text{állandó}$ bemenőjelek hatására $t \rightarrow \infty$ határhelyzetben szükségszerűen létrejön az állapotváltozók $x(\infty) = x_0 = \text{állandó}$ és a kimenőjelek $y(\infty) = y_0 = \text{állandó}$ koordinátákkal rendelkező egyensúlyi értéke. Ekkor a $dx(t)/dt$ állapotsebesség-vektor minden eleme zérus. A stabilis rendszer x_0 és y_0 koordinátáinak meghatározásához nem szükséges kiszámítani az állapotegyenlet $x(t)$ és $y(t)$ megoldásait – és ezek $t \rightarrow \infty$ időhöz tartozó $x(\infty)$ és $y(\infty)$ végértékeit –, mivel ebben az üzemmódban $[dx(t)/dt]_{t \rightarrow \infty} = 0$, és ezért

$$\begin{aligned} x(\infty) = x_0 &= -A^{-1} B u_0 \\ y(\infty) = y_0 &= C x_0 + D u_0 = (-CA^{-1} B + D) u_0. \end{aligned}$$

⁴ Az átviteli függvényeknek a p_i *pólusokon* kívül z_i *zérusok* is lehetnek (ezek a $W(s) = G(s)/H(s)$ átviteli függvény $G(s)$ számlálójának a z_i gyökei). A transziens folyamatokra a zérusok is befolyást gyakorolnak, a tag *stabilitására* azonban *semmi hatásuk sincs*.



1. ábra Aszimptotikusan stabilis dinamikus rendszer pólusainak eloszlása és ugrásjel-válaszainak végértéke

Ezek látszólag egyszerű algebrai műveleteket tartalmazó kifejezések, a nehézségek forrása a mátrixműveletek (pl. a mátrix inverzének⁵) kiszámításában van, különösen, ha az n rendszám magas értékű.

A tárgyalt fordulatszám-szabályozás példája kapcsán tranziens analízist végzünk a **szabályozó** és a **folyamat** alrendszerének, valamint az alrendszerekből felépülő **teljes visszacsatolt rendszernek** a tanulmányozására. Ennek során felírjuk a dinamikus rendszerek **differenciálegyenleteit, átviteli függvényeit, az állapot-egyenleteket** és az **átviteli mátrixokat**⁶. Megmutatjuk az arányos (**0**-típusú) és az integrál (**1**-típusú) szabályozás közötti különbséget, ill. azt, hogy a **PI**-szabályozó miként hasznosítja a **P**-, ill. az **I**-szabályozó alkalmazásának előnyeit. Megadjuk a folytonos **PI**-szabályozónak – műveleti erősítő felhasználásával kialakított – elvi, áramköri, kapcsolási vázlatát és rendszerjellemző függvényeit. Lényegében egy konkrét példán keresztül mutatjuk be azokat az elveket és módszereket, amelyek más dinamikus folyamatok és szabályozási rendszerek vizsgálatakor is használhatók. Mielőtt a **teljes visszacsatolt szabályozási rendszer** matematikai modelljének tárgyalásához kezdenénk, áttekintjük az **alrendszerek** (a műveleti erősítővel felépített **szabályozó** áramkörének és a **folyamatot** megjelenítő elektromechanikai rendszernek) modellalkotását.

⁵ Az $n \times n$ méretű A reguláris ($\det A \neq 0$), négyzetes mátrix inverzének meghatározása: $A^{-1} = \text{inv}(A) = \text{adj}(A) / \det(A)$. Az a_{ij} elemekkel rendelkező A mátrix adjungáltja $\text{adj}A = [a_{ji}]$ elemhez tartozó *társtényező*^T. Az a_{ij} elemhez tartozó *társtényező* az a determináns, amelyet az A mátrix determinánsából úgy kapunk, hogy az A i -edik sorát és a j -edik oszlopát elhagyjuk, és a kapott determináns $(-1)^{i+j}$ -vel megszorozzuk. Figyeljük meg, hogy az adjungált mátrixban szereplő társtényező az A determinánsánál eggyel alacsonyabb rendű aldetermináns. Speciálisan, ha $A = a$ skaláris, akkor $\text{inv}A = a^{-1} = 1/a$, és ha

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ akkor : } \text{inv}A = \frac{\text{adj}A}{\det A} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

MATLAB-támogatás az inverzmátrix és az egyensúlyi koordináták meghatározására: $A \text{inv} = \text{inv}(A)$; $x0 = -\text{inv}(A) * B * u0$; $y0 = (-C * \text{inv}(A) * B + D) * u0$;

⁶ A differenciálegyenletek megoldására $n > 1$ rendszám esetében általában gépi módszereket használunk, pl.: **lsim**, **step**, **impulse**, **initial**.

Műveleti erősítő visszacsatolása. A szabályozó szerkezeti vázlata, átviteli függvénye, differenciálegyenlete, hatásvázlata és stabilitása

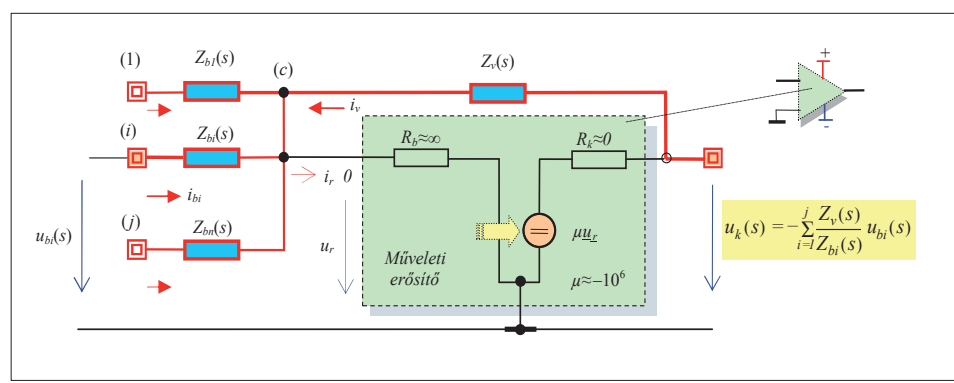
Az elektronikus áramkörök témaköréből ismert – műveleti erősítő negatív visszacsatolásával kialakított – áramköri kapcsolás a 2. ábrán látható.

Az áramkör (i) bemenetere ($i: 1, 2, \dots, j$) kapcsolt u_{bi} bemenőfeszültségek és az u_r feszültség $u_{bi} - u_r$ különbségei a $Z_{bi}(s)$ bemeneti impedanciákon átfolyó i_{bi} áramokat, az $u_r - u_k$ feszültségkülönbség a

$Z_v(s)$ visszacsatoló impedancián átfolyó i_v áramot, az u_r pedig az $i_v \approx 0$ áramot hozza létre. A műveleti erősítő u_k kimenőfeszültsége $u_k = \mu u_r$. (Miótán $\mu \approx -10^6 \sim -10^8$ nagyságrendű, a műveleti erősítő fázisfordító tulajdonságú, és ezért $u_r = u_k / \mu \approx 0$). Az operátoros impedanciákkal számolva a **c**-csomópontra felírható **Kirchhoff**-csomóponti egyenlet alapján – ideális műveleti erősítőt ($\mu = -\infty, R_b = \infty, R_k = 0, i_r = 0$) feltételezve – kapjuk:

$$\sum_{i=1}^j \frac{u_{bi}(s)}{Z_{bi}(s)} + \frac{u_k(s)}{Z_v(s)} = 0 \quad \text{és innen} \Rightarrow$$

$$u_k(s) = -\sum_{i=1}^j \frac{Z_v(s)}{Z_{bi}(s)} u_{bi}(s) = -\sum_{i=1}^j W_i(s) u_{bi}(s).$$



2. ábra Műveleti erősítő visszacsatolása

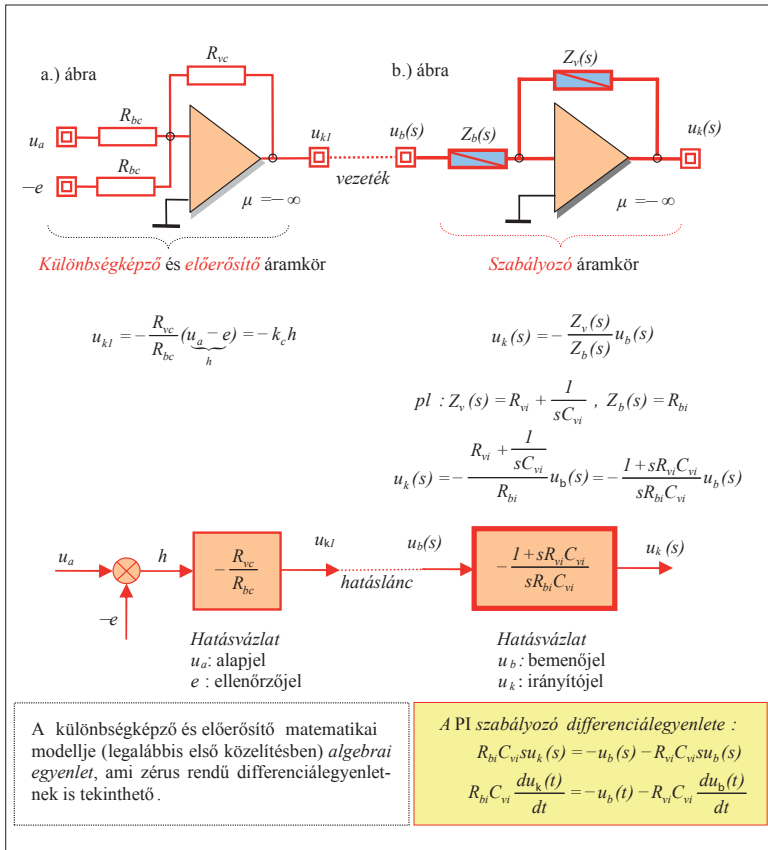
A bemenetek j számának, valamint a $Z_{bi}(s)$ bemeneti- és a $Z_v(s)$ visszacsatoló impedanciák célirányos megválasztásával különféle függvénykapcsolatok létesíthetők az $u_{bi}(s)$ bemenő- és az $u_k(s) = W_i(s) u_{bi}(s)$ kimenőfeszültségek **Laplace**-transzformáltjai között. Ebben a kifejezésben $W_i(s) = -Z_v(s) / Z_{bi}(s) = u_k(s) / u_{bi}(s)$ az u_k kimenőjel és az (i)-bemeneten ható u_{bi} bemenőjel között értelmezhető átviteli függvény, aminek birtokában az $u_k(t)$ kimenőjel és az $u_{bi}(t)$ bemenőjel közötti differenciálegyenlet is felírható⁷. Példaként a 3. ábrán a szabályozásokban gyakran használt, két áramköri kapcsolást is bemutatunk. A 3a. ábra áramköre az u_a és a $-e$ jelek előjelhelyes összegzésére (a különbségképzésére) és a különbségi jel előerősítésére alkalmas. A 3b. ábrán látható

⁷ Ha $Z_{bi}(s) = R_{bi}$ és $Z_v(s) = R_v$ ohmos ellenállások, akkor az u_k kimenőjel, és az (i)-bemeneten ható u_{bi} bemenőjel közötti differenciálegyenlet rendszáma zérus, vagyis ekkor (legalábbis egy adott $0 < \omega < \omega_{max}$ körfrekvencia tartományban) $u_k = k u_{bi}$ ($k = -R_v / R_{bi}$) algebrai függvénykapcsolatról van szó. Ez pedig egy zérusrendű differenciálegyenletnek is tekinthető.

áramkörben a $Z_v(s)$ és $Z_b(s)$ megfelelő megválasztásával különféle szabályozási algoritmusokat lehet megvalósítani⁸.

A $h= u_a - e$ bemenőjelű előerősítő és a vele soros kapcsolást alkotó szabályozó áramkör matematikai modellje egy elsőrendű – a bemenőjel $dh(t)/dt$ idő szerinti differenciálhányadosát is tartalmazó – differenciálegyenlet, amelyben az u_k kimenőjel zérusrendű

differenciálhányadosa – vagyis maga az $u_k(t)$ kimenőjel – nem is szerepel. Az előerősítő és a szabályozó áramkörének átviteli függvénye alaptagokból felépített hatásvázlattal is leírható (4. ábra, ahol $R_{bi}=R_{vi}=R$, $C_{vi}=C$, $T_i=RC$ pedig az ismétlési idő). Ennek alapján a szabályozó állapotegyenlete egyszerűen megadható⁹.



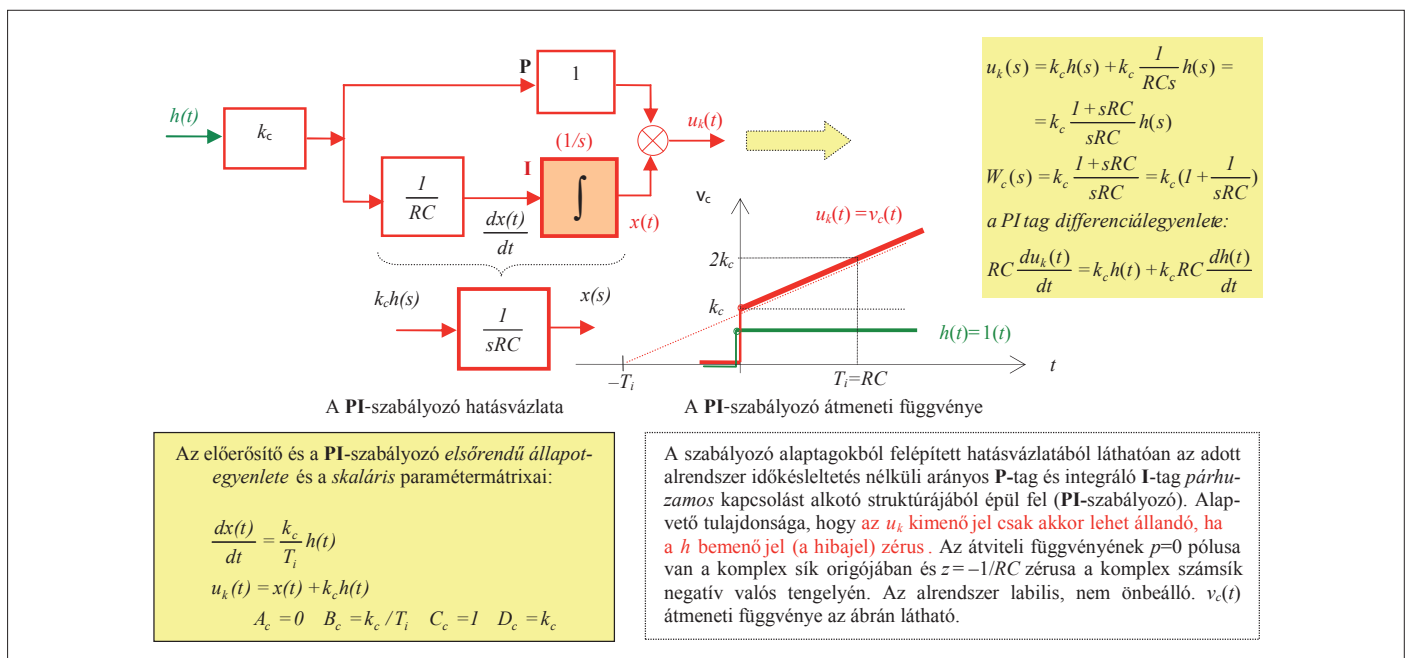
Az elektromechanikai folyamat működési elve és szerkezeti vázlat, átviteli függvénye, hatásvázlata, állapotegyenlete, állapotmátrixa és stabilitása

Az elektromechanikai folyamat (esetünkben most egy külső gerjesztésű, egyenáramú villamos motor) matematikai modelljét az állandó Φ fluxusú mágneses térben egy áramtól átjárt vezető egyenesvonalú mozgásából származtathatjuk (elemi villamos gép, lásd 5. ábra). A villamos motor üzemtani tulajdonságai ettől abban különböznek, hogy ez utóbbinál az egyenesvonalú mozgás helyett *forgómozgásról* van szó. A modellalkotáshoz a mechanika *Newton-törvényeit*, az elektrotechnika *Kirchhoff*-egyenleteit, valamint elektrodinamikai tételeket kell felhasználnunk. A motor $\Omega(t)$ szögsebessége a *szabályozott jellemző*, amit az $m_T(t)$ terhelőnyomaték (a *zavarójellemző*) nemkívánatosan befolyásol. A terhelés szögsebességre gyakorolt nemkívánatos hatását az $u_k(t)$ kapocsfeszültség (a *módosított jellemző*) szándékolt megváltoztatásával lehet elhárítani. Mindezek miatt meg kell alkotni a folyamat olyan matematikai modelljét, amelynek birtokában megválaszolható az a kérdés, hogy a folyamat $u_k(t)$, $m_T(t)$ bemenőjelei miként befolyásolják a folyamat $\Omega(t)$ kimenőjelét. Ez a matematikai modell egy

$$\frac{R\theta}{(c\Phi)^2} \frac{L}{R} \frac{d^2\Omega(t)}{dt^2} + \frac{R\theta}{(c\Phi)^2} \frac{d\Omega(t)}{dt} + \Omega(t) = \frac{1}{c\Phi} u_k(t) - \frac{R}{(c\Phi)^2} [m_T(t) + \frac{L}{R} \frac{dm_T(t)}{dt}]$$

3. ábra A szabályozók realizálásában használt áramkörök és ezek matematikai modelljei

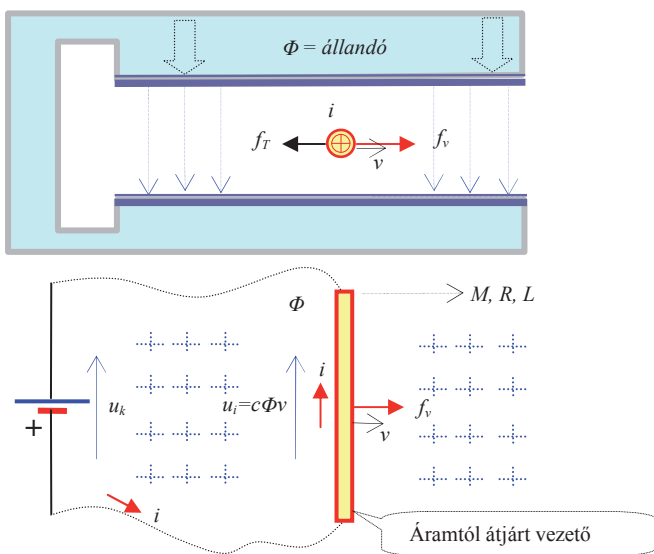
4. ábra PI-szabályozó alaptagokból felépített hatásvázlata, átviteli függvénye, állapotegyenlete és átmeneti függvénye



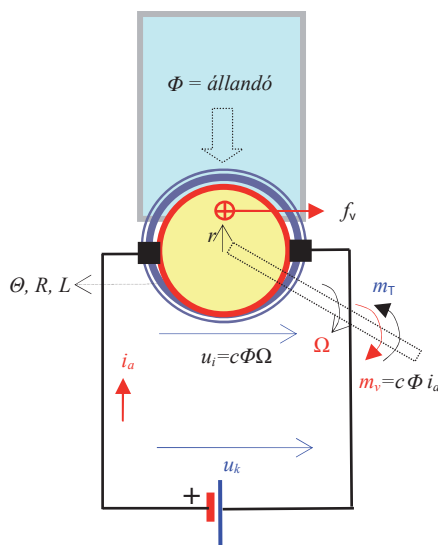
⁸ A tárgyalt fordulatszám-szabályozási rendszer szerkezeti vázlatán a két áramkör soros kapcsolása alkotja a szabályozót.

⁹ A PI-szabályozó áramköri kapcsolása a P- és I-csatornak párhuzamos kapcsolása alapján is kialakítható. Ennek előnye, hogy a szerkezeti megoldásban a P- és az I-csatornak egymástól egyszerűen elválaszthatók, és a struktúra P- vagy I-szabályozóként is használható.

Egyenesvonalú mozgás (elemi villamos gép, elvi vázlat)



Forgómozgás (egyenáramú villamos motor, elvi vázlat)



Az ábrán állandó Φ fluxusú mágneses térben, sűrűlódásmentesen mozgó, M tömegű vezető vázlat látható. A vezetőn keletkező f_v erőt a rajta átfolyó i áram hozza létre, értéke a fluxus és az áram Φi szorzatával arányos. Az f_v erő hatására a vezető (az $Ma = Mdv/dt = f_v - f_T$ mozgásegyenlete szerint, f_T a terhelés) $a = dv/dt$ gyorsulással mozog, $f_v > f_T$ esetén v sebessége növekszik. A vezetőn átfolyó áramot az u_k kapcsolófeszültség és az u_i indukált feszültség különbsége hajtja. Az u_i indukált feszültség a fluxus és a sebesség Φv szorzatával arányos, és a sebesség növekedésével növekszik. Az áram kialakulását befolyásolja a vezető R ellenállása, és az áramhurok L induktivitása is. Egyensúlyi állapotban az u_{k0} feszültség és az u_{i0} indukált feszültség különbsége akkora áramot tart fenn, ami az f_{T0} erőt kiegyensúlyozza: $f_{T0} = f_{v0} = c\Phi i_{a0}$. Ekkor a vezető állandó sebességgel mozog, miután a gyorsító erő zérus. **Állandósult** állapotban tehát:

$$i_{a0} = \frac{u_{k0} - u_{i0}}{R} = \frac{u_{k0} - c\Phi v_0}{R} \rightarrow v_0 = \frac{u_{k0} - i_{a0}R}{c\Phi} = \frac{c\Phi u_{k0} - R f_{T0}}{(c\Phi)^2}$$

Az egyenesvonalú mozgás transziens folyamatát leíró matematikai modell:

$$\begin{aligned} f_v(t) &= c\Phi i(t) \\ u_i(t) &= c\Phi v(t) \\ u_k(t) &= Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + u_i(t) \\ M \frac{dv(t)}{dt} &= f_v(t) - f_T(t) \end{aligned}$$

hatásvázlat

f_v [N], f_T [N], i [A], u_i [V], u_k [V], v [m/s], t [s]
 Φ [Vs/m²] fluxus, M [Ns²/m] tömeg, R [V/A] ellenállás
 L [Vs/A] induktivitás, $c\Phi$ [N/A] állandó

A külső gerjesztésű, egyenáramú motor működési elve hasonló, de itt az egyenesvonalú mozgás helyett *forgómozgásról* van szó. Ezért az f_v erő helyett az m_v villamos nyomaték, az a gyorsulás helyett az ϵ szöggyorsulás, a v sebesség helyett az Ω szögsebesség, az M tömeg helyett a Θ tehetetlenségi nyomaték szerepel az elektromechanikai rendszer matematikai modelljében. Álló állapotban $u_k = \text{áll.}$ feszültséget kapcsolva az m_T nyomatékkal terhelt gép armatúrájára, i_a áram indul, és ez a kerületen f_v erőt, ill. a forgórészben $m_v = c\Phi i_a$ nyomatékot hoz létre. Az $m = m_v - m_T$ nyomaték gyorsítja a forgórészt a $\Theta \epsilon = \Theta d\Omega/dt = m = m_v - m_T$ mozgásegyenletnek megfelelően. $m_v > m_T$ esetén az Ω szögsebesség növekszik, és ezzel arányosan növekszik az $u_i = c\Phi\Omega$ indukált feszültség is. Előbb-utóbb egyensúlyi állapot alakul ki, ami az áram $-m_{v0} = c\Phi i_{a0} = m_{T0}$ nyomatékegyenletnek megfelelő $-i_{a0} = m_{T0}/(c\Phi)$ értékre történő beállításához vezet. Ekkor a gyorsítónyomaték $m_{v0} - m_{T0} = 0$, és a motor állandó szögsebességgel forog. **Egyensúlyi** (állandósult) üzemhelyzetben:

$$i_{a0} = \frac{u_{k0} - u_{i0}}{R} = \frac{u_{k0} - c\Phi\Omega_0}{R} \rightarrow \Omega_0 = \frac{u_{k0} - i_{a0}R}{c\Phi} = \frac{c\Phi u_{k0} - R m_{T0}}{(c\Phi)^2}$$

Az egyenáramú motor transziens folyamatát leíró matematikai modell (a motor **alapegyenletei**):

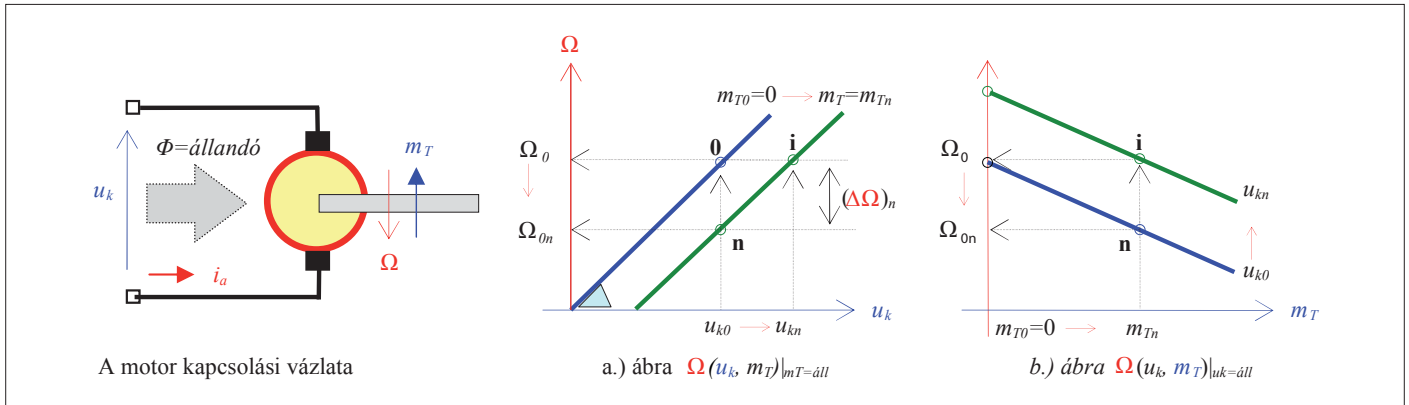
$$\begin{aligned} m_v(t) &= c\Phi i_a(t) \\ u_i(t) &= c\Phi\Omega(t) \\ u_k(t) &= Ri_a(t) + L \frac{di_a(t)}{dt} + u_i(t) \\ \Theta \frac{d\Omega(t)}{dt} &= m_v(t) - m_T(t) \end{aligned}$$

hatásvázlat

m_v [Nm], m_T [Nm], i_a [A], u_i [V], u_k [V], Ω [r/s], t [s]
 Φ [Vs/m²] fluxus, Θ [Ns²m] tehetetlenségi nyomaték, R [V/A] ellenállás, L [Vs/A] induktivitás, $c\Phi$ [Nm/A] gépállandó

Az elektromechanikai folyamat matematikai modelljének felállításakor **elhanyagoltuk** az armatúreakciót (azt, hogy a motor árama visszahat a gerjesztő fluxusra), a csapágy-, a kefe- és légsűrűlódást, a kefék átmeneti ellenállását stb. Mindezek miatt a matematikai modell a fizikai valóság egyfajta közelítése. Φ most az állandó, névleges gerjesztőfluxust jelenti.

5. ábra Az elektromechanikai folyamat szerkezeti vázlat, működési elve és matematikai modellje



6. ábra A villamosmotor statikus (ún. „külső”) karakterisztikái

alakban adódó, másodrendű, állandó együtthatójú, lineáris differenciálegyenlet (LDE), vagy a

$$\begin{bmatrix} \frac{d\Omega(t)}{dt} \\ \frac{di_a(t)}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & c\phi \\ -c\phi & -R \end{bmatrix}}_{A_p} \begin{bmatrix} \Omega(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{B_p} \begin{bmatrix} u_k(t) \\ m_T(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_p} \begin{bmatrix} \Omega(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D_p} \begin{bmatrix} u_k(t) \\ m_T(t) \end{bmatrix}$$

alakban levezethető, két elsőrendű lineáris differenciálegyenletből álló differenciálegyenlet-rendszer (az állapotegyenlet, **LÁE**). Mindkét – egyébként egymással egyenértékű – modell a villamos gép **alapegyenleteinek** felhasználásával állítható elő (lásd a motor 5. ábra kapcsán felírt **alapegyenleteit**, ahol R, L, θ, c, Φ paraméterek). Fontos észrevennünk, hogy adott $u_k(t)$ és $m_T(t)$ bemenőjelre a másodrendű differenciálegyenlet $\Omega(t)$ megoldása a **szögsebességet**, az állapotegyenlet $y_1(t)=\Omega(t), y_2(t)=i_a(t)$ megoldásai a szögsebesség mellett az $i_a(t)$ **armatúraáramot** is tartalmazza. Az armatúraáramnak a transziens folyamatok közben történő nyomon követését **védelmi** okok indokolják, az áramtúlterhelésnek ugyanis káros következményei lehetnek. Az egyenáramú villamos gép **fizikai működéséből** az is nyilvánvaló, hogy az állandó u_{k0} kapocsfeszültség és az m_{T0} terhelőnyomaték – állandósult üzemiállapotban – állandó Ω_0 szögsebességet és i_{a0} armatúraáramot eredményez, vagyis a **folyamat aszimptotikusan stabilis**, amit természetesen a matematikai modelleknek is igazolniuk kell. A villamos motor állandósult állapotában az Ω_0 szögsebesség, az u_{k0} kapocsfeszültség és az m_{T0} terhelőnyomaték állandó értékei közötti összefüggést legegyszerűbben a motor másodrendű differenciálegyenletéből kaphatjuk meg. Az állandósult üzemiállapotban ugyanis $\dot{\Omega}_0 = \dot{\Omega}_0 = 0, \dot{m}_{T0} = \dot{m}_{T0} = 0$, és ennek következményeként $d^2\Omega_0(t)/dt^2 = d\Omega_0(t)/dt = 0, dm_{T0}(t)/dt = 0$. Mindezek eredményeként az $\Omega_0 = \Omega_0(u_{k0}, m_{T0})$ függvény:

$$\Omega_0 = \Omega_0(u_{k0}, m_{T0}) = \frac{1}{c\phi} u_{k0} - \frac{R}{(c\phi)^2} m_{T0} = \frac{c\phi u_{k0} - R m_{T0}}{(c\phi)^2}$$

Ebben c jelöli a gépállandót, Φ a gép állandó névleges gerjesztőfluxusa, R az armatúrákör ellenállása. Az adott függvénykapcsolatok alapján a villamosmotor ún. „külső” jelleggörbéi (az $\Omega_0(u_{k0}), \Omega_0(m_{T0})$ statikus karakterisztikái) a 6. ábrán láthatók.

A karakterisztikákból az is következik, hogy a gép állandó gerjesztőfluxusa esetében **lineáris** függvénykapcsolatról van szó. Ha a terhelőnyomaték (egy adott u_{k0} kapocsfeszültségen) az m_{Tn} névleges értékére növekszik, a szögsebesség – az Ω_0 üresjárási értékéhez képest – Ω_{0n} értékre csökken (6a. ábra). A terhelés okozta $(\Delta\Omega)_n$ **szögsebesség-csökkenést** a kapocsfeszültség u_{k0} -ról u_{kn} -re történő **magnövelésével** lehetne kompenzálni (6b. ábra). A motor $u_{k0}, m_{T0} = 0$ bemenő jelek mellett Ω_0 szögsebességgel üzemel (lásd 6b. ábra 0.). Ha a kapocsfeszültség és a terhelőnyomaték ugrásszerűen u_{kn} -re illetve m_{Tn} -re növekszik, az új egyensúlyi helyzet a 6a. ábra i pontjában alakulna ki. Annak leírása, hogy a rendszer transziens folyamatai miként alakulnak az átmenet során az **LDE**, vagy a **LAE** differenciál egyenletek megoldása szükséges.

A következő fejezetekben az egyenáramú motor – ami a teljes, zárt szabályozási kör egy másik alrendszere – különféle matematikai modelljeinek a meghatározásaival és ezek megoldási módszereivel foglalkozunk. Az itt alkalmazott modellalkotási folyamat igen egyszerű, mivel az adott elektromechanikai rendszer a fizika törvényeivel viszonylag jól leírható, és a különféle „elhanyagolások” a jelenségeket kevésbé befolyásolják¹⁰.

Az elektromechanikai szerkezet matematikai modellje¹¹ a motor alapegyenleteiből különféle alakban kapható (**LDE**, **LÁE**). Ezeket az egymással **egyenértékű** alakokat mind az analízisben, mind a szintézisben felhasználjuk.

(Folytatjuk!)

szbela@iit.bme.hu
juhaszne@iit.bme.hu

¹⁰ Más folyamatok esetében a modellalkotás lényegesen bonyolultabb lehet, és nemritkán magas rendszámú, **nemlineáris** differenciálegyenletekhez vezethet. Ilyen lenne az itt tárgyalt elektrodinamikai folyamat is, ha az Ω szögsebességet nem az u_k kapocsfeszültséggel, hanem a Φ gerjesztő fluxussal kívánnánk befolyásolni.

¹¹ A motor **állandósult** szögsebessége $\Omega_0 = (c\phi u_{k0} - R m_{T0}) / (c\phi)^2$. Ez az u_{k0} kapocsfeszültségnek és az m_{T0} terhelőnyomatéknak **lineáris**, a Φ gerjesztő fluxusnak **nemlineáris** függvénye. A Ω_0 szögsebességnek az u_{k0} kapocsfeszültséggel történő befolyásolását **armatúrákörü beavatkozásnak** hívjuk, és ekkor $\Phi = \Phi_n = \text{állandó}$ névleges fluxus mellett lineáris matematikai modellel dolgozhatunk (lásd a 6. ábrát). A Ω_0 szögsebességnek a Φ gerjesztő fluxussal történő befolyásolása a **gerjesztőkörü beavatkozás**. Ilyen esetben a folyamat matematikai modellje **nemlineáris** differenciálegyenlet, és a „megszaladás” veszélyének elkerülése érdekében $\Phi < \Phi_n/3$ nem megengedett üzemiállapot (Φ_n a gerjesztő fluxus névleges értéke).