Szabályozástechnika – 5.

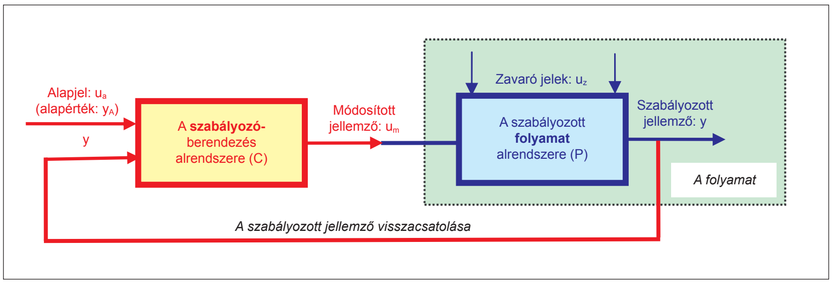
Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencné

A szabályozástechnikai alapfogalmak ismertetése során a cikksorozat folytatásában a szabályozási rendszerek matematikai modellalkotását és a stabilitási feltételeit tekintjük át. Az elemzésben megismerünk néhány további, alapvető szabályozástechnikai fogalmat is.

Matematikai modellalkotás

A bevezető részben az *arányos*, az *állásos és* az *integrál* szabályozások *zavarelhárítási* kérdéskörével foglalkoztunk. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy a szabályozások üzemtanának legalább ilyen fontos kérdése az is, hogy az időben változó $u_a(t)$ alapjelet a szabályozott jellemző milyen módon képes *követni*.

Az „egyhurkos" szabályozás hatásvázlatát az 1. ábra mutatja.



1. ábra Az „egyhurkos" szabályozás hatásvázlata

Általános esetben – miután két dinamikus alrendszer együttműködéséről van szó – mind a folyamatot, mind a szabályozóberendezést és a teljes visszacsatolt rendszert is, kisebb-nagyobb rendszámú differenciálegyenletek írják le. A folyamat (**P**) és a szabályozóberendezés (**C**) differenciálegyenlete általában implicit alakban tartalmazza a kimenő- és bemenőjeleken túlmenően ezek idő szerinti (a folyamat esetében maximálisan n_p rendű, a szabályozó esetében n_c rendű) differenciálhányadosait is. A folyamat bemenőjelei az u_m módosított jellemző és az u_z zavaró jelek, kimenőjele az y szabályozott jellemző. A teljes szabályozóberendezést absztraháló tag bemenőjelei az y_A alapértéket megjelenítő u_a alapjel, és az y szabályozott jellemző, kimenőjele az u_m módosított jellemző. Az egy szabályozott jellemzővel, és ennek megfelelően egy alapjellel rendelkező („egyhurkos") szabályozási rendszer mindkét jelátvivő tagja ún. **MISO** (**m**ulti **i**nput–**s**ingle **o**utput→több bemenetű, egy kimenetű) tagok, és a zárthurkú hatáslánc a közös u_m jellel, valamint az y szabályozott jellemzőnek a szabályozó bemenetére történő negatív visszacsatolásával jön létre. A bemenő és kimenő jelek között felépíthető matematikai modell mindkét alrendszer esetében az

$$P\left(\underbrace{\frac{d^{n_p}y(t)}{dt^{n_p}},\cdots,y(t)}_{kimenő\quad jel},\underbrace{\frac{d^{n_p}u_m(t)}{dt^{n_p}},\cdots,u_m(t),\frac{d^{n_p}u_z(t)}{dt^{n_p}},\cdots,u_z(t)}_{bemenő\quad jelek}\right)=0$$

$$C\left(\underbrace{\frac{d^{n_c}u_m(t)}{dt^{n_c}},\cdots,u_m(t)}_{kimenő\quad jel},\underbrace{\frac{d^{n_c}u_a(t)}{dt^{n_c}},\cdots,u_a(t),\frac{d^{n_c}y(t)}{dt^{n_c}},\cdots,y(t)}_{bemenő\quad jelek}\right)=0$$

implicit alakban felírható P=0, C=0 differenciálegyenletekből álló differenciálegyenlet rendszer. Ebben a bemenő jelek legmagasabb rendű differenciálhányadosainak rendszáma – itt nem részletezett realizálhatósági feltételek miatt – nem haladhatja meg a kimenő jel differenciálhányadosainak rendszámát[1]. A két n_p és n_c *rendű* differenciálegyenletből álló differenciálegyenlet rendszer a visszacsatolt szabályozásnak is a matematikai modellje, mivel az $u_m(t)$ és az $y(t)$ jelekkel a két rendszer egymáshoz is csatolva van.

[1] A folyamat esetében most csak egy zavaró jelet veszünk számításba.

Állapotegyenletek

Ha az egyensúlyi helyzeteken túlmenően a tranziens viselkedést is tanulmányozni kívánjuk, akkor rendszerint az $u_a(t)$ és $u_z(t)$ előzetesen felvett determinisztikus vizsgáló jeleivel (pl. *Dirac*-delta: $\delta(t)$, egységugrás: $\mathbf{1}(t)$, sebességugrás: $t\mathbf{1}(t)$, gyorsulásugrás: $(t^2/2)\mathbf{1}(t)$, harmonikus jel: $sin(\omega t)\mathbf{1}(t)$) kell a differenciálegyenlet rendszert az $y(t)$ és $u_m(t)$ jelekre megoldani. Az implicit alak kezelése nehézkes, ezért a tagok matematikai modelljét – ha ez megtehető – más alakban írjuk fel. Bevezetve a folyamat n_p számú $x_p(t)$, és a szabályozó n_c számú $x_c(t)$ állapotváltozóit, mindkét alrendszert n_p, n_c számú *elsőrendű* közönséges, nemlineáris differenciálegyenletekből álló differenciálegyenlet rendszerrel, és a kimenő jeleiket meghatározó egy-egy nemlineáris algebrai egyenlettel modellezhetjük. Ez a differenciálegyenlet rendszer, és az ezt kísérő algebrai egyenlet az alrendszerek ún. ***állapotegyenletei***. Vektor differenciálegyenlet alakban felírható alakjuk:

A folyamat állapotegyenlete:

$$\frac{dx_p(t)}{dt}=f_p[x_p(t),u_m(t),u_z(t)]$$
$$y(t)=g_p[x_p(t),u_m(t),u_z(t)]$$

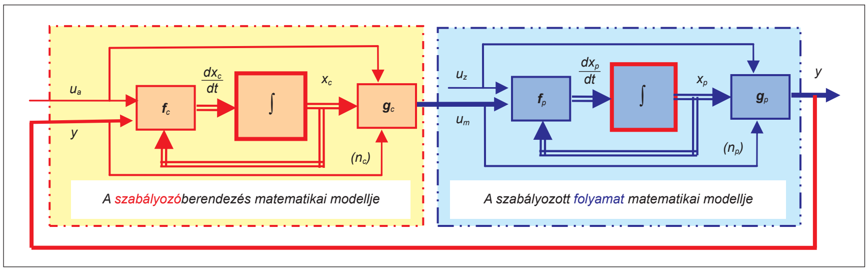
A szabályozóberendezés állapotegyenlete:

$$\frac{dx_c(t)}{dt}=f_c[x_c(t),u_a(t),y(t)]$$
$$u_m(t)=g_c[x_c(t),u_a(t),y(t)]$$

Ezek az állapotegyenletek azt fejezik ki, hogy mindkét alrendszer y és u_m *kimenő* jele a saját x_p és x_c állapotváltozóitól és a bemenő jeleitől függ az $y=g_p(x_p,u_m,u_z)$ és $u_m=g_c(x_c,u_a,y)$

nemlineáris algebrai egyenletnek megfelelően. Az $x_p(t)$ és $x_c(t)$ állapotváltozók szintén az alrendszerek bemenő jeleitől függnek, de ezt a függvénykapcsolatot az f_p, f_c differenciálegyenlet rendszerek határozzák meg. Mindezeket hatásvázlaton is részletezve a 2. ábrát kaphatjuk.

Ez a hatásvázlat azt szemlélteti, hogy a $dx_c(t)/dt$, $dx_p(t)/dt$ állapotsebességeket integráló tagok bemenetein működtetve, azok kimenetein jönnek létre az $x_c(t)$, $x_p(t)$ állapotváltozók. Az állapotváltozók és a bemenő jelek – az f_c és f_p függvényeknek megfelelően – állítják elő az alrendszerek integrátorainak bemenő jeleit, az állapotsebességeket[2].



2. ábra A szabályozás dinamikus alrendszereinek leírása állapotegyenletekkel

Az alrendszerek dinamikus tulajdonságait leíró hatásvázlat részek láthatóan azonos típusú részstruktúrákat tartalmaznak a szabályozó és a folyamat vonatkozásában is, annak ellenére, hogy ezek fizikai megvalósulásukban teljesen eltérő szerkezeteket, áramköröket, berendezéseket stb. jellemeznek. Ez azért van, mert a szabályozóberendezés is és a folyamat is egy-egy dinamikus alrendszer, és ezek leírására az egységesen értelmezett állapotegyenleteket használjuk. Természetesen a szabályozó, ill. a folyamat konkrét f_p, g_p, f_c, g_c függvényei lényegesen eltérhetnek egymástól, mivel másmás funkcionális feladatokat ellátó szerkezetek matematikai modelljeiről van szó (lásd a korábban tárgyalt szerkezeti és működési vázlatokat).

A hatásvázlattal azt kívántuk érzékeltetni, hogy a dinamikus viszonyok analízise (például annak vizsgálata, hogy a rendszer az egyik egyensúlyi pontjából miként megy át egy másik egyensúlyi pontjába) lényegesen nehezebb feladat a statikus üzemviszonyok tanulmányozásánál. Ha állandó u_{a0} alapjel és u_{z0} zavaró jel mellett *az eredő dinamikus rendszer stabilis*[3], akkor létrejönnek az állapotváltozók x_{p0}, x_{c0} és a kimenő jelek y_0, u_{m0} egyensúlyi értékei, vagyis van a rendszernek stabilis egyensúlyi helyzete, illetve stabilis egyensúlyi munkapontja. Ebben az egyensúlyi állapotban a rendszer jelei időben nem változnak, ezért a $dx_c(t)/dt|_{t=\infty}$, $dx_p(t)/dt|_{t=\infty}$ állapotsebességek értékei zérusok. Az egyensúlyi helyzet x_{p0}, x_{c0} és y_0, u_{m0} koordinátái tehát ki kell hogy elégítsék a dinamikus modellből származtatható

$$\left.\begin{aligned} 0 &= f_p(x_{p0}, u_{m0}, u_{z0}) \\ y_0 &= g_p(x_{p0}, u_{m0}, u_{z0}) \end{aligned}\right\} \quad \textit{folyamat}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= f_c(x_{c0}, u_{a0}, y_0) \\ u_{m0} &= g_c(x_{c0}, u_{a0}, y_0) \end{aligned}\right\} \quad \textit{szabályozó}$$

nemlineáris algebrai egyenletrendszert[4]. (A megelőző vizsgálatokban – arányos, integráló és állásos szabályozások eseteiben – ennek az egyensúlyi helyzetnek az üzemtanát tárgyaltuk, az alrendszerek statikus karakterisztikáinak az alapján.)

---

2 Az $x(t)$ állapotváltozókat és a $dx(t)/dt$ állapotsebességeket jelképező, nyilakkal ellátott, dupla vonalak a hatásirányon túlmenően azt is jelentik, hogy a szabályozónak n_c, a folyamatnak n_p számú állapotváltozója van. Az integráló tagok száma azonos az állapotváltozók számával.

3 A rendszer stabilitása azt jelenti, hogy állandó u_{a0}, u_{z0} bemenő jeleket kapcsolva a rendszer bemenetére, a tranziens folyamatok „lecsengenek”, és $t \to \infty$ mellett az állapotváltozók is és a kimenő jelek is egy x_{c0}, x_{p0}, y_0, u_{m0} állandósult értékre állnak be.

4 Az eredeti implicit függvényekkel, az u_{a0}, u_{z0} állandó bemenő jelekre vonatkozó u_{m0}, y_{z0} egyensúlyi helyzet koordinátáit a $P(y_0, u_{m0}, u_{z0})=0$, $C(u_{m0}, u_{a0}, y_0)=0$ nemlineáris egyenletrendszer megoldása szolgáltatná.

A rendszertechnikai tervezés célkitűzése

Az ideálisan működő rendszer $y(t)$ szabályozott jellemzőjének időfüggvénye azonos lenne az $y_A(t)=u_a(t)/A_E$ alapérték időfüggvényével, vagyis pontos **alapjelkövetés** és teljes mértékű **zavarelhárítás** (értéktartás) valósulna meg. Ilyen rendszer létrehozásának azonban realitása nincs, valóságos körülmények között mind az alapjelkövetésben, mind a zavarelhárításban hibák keletkeznek. Ennek elsődleges oka a dinamikus rendszerek tehetetlensége és a jelterjedés véges sebessége (energiatárolásból és holtidőből származó késleltetések). A rendszertechnikai tervezés célkitűzése az, hogy a szabályozóberendezés f_c, g_c matematikai modelljét úgy válasszuk meg, hogy ennek eredményeként a zárt szabályozási rendszer **stabilis** legyen, és ezen túlmenően *a követési és az értéktartási hibák minimálisak legyenek*. Ahhoz, hogy ennek a követelményeknek a kielégítésére alkalmas szabályozóberendezést létrehozhassuk, előzetesen egy analízis keretei között a visszacsatolt rendszer statikus és dinamikus tulajdonságainak tanulmányozását is el kell végeznünk. Ennek lehet majd az eredménye, hogy *a zárt rendszerrel szemben reális követelményeket támasszunk*, és ez vezet majd el ahhoz is, hogy a fizikailag realizálható szabályozóberendezést megalkossuk.

A rendszer dinamikus tulajdonságainak vizsgálati módszerei

Az előzőekben felírt nemlineáris állapotegyenletek alkalmasak lehetnek a rendszer dinamikus tulajdonságainak vizsgálatára, de az alkalmazott analízis módszerei jelentős mértékben függenek az f_c, g_c, f_p, g_p nemlineáris függvények típusaitól. Abban a speciális esetben azonban, ha ezek a függvények lineáris kapcsolatokat adnak meg a változóik között, az állapotegyenletek jelentősen egyszerűsödnek, és az analízis módszerei és eredményei – legalábbis ebben a függvényosztályban – általánosan érvényesek. A lineáris rendszer állapotegyenlete is az alrendszerek állapotegyenleteiből épül fel. Ekkor:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_p(t)}{dt} &= A_p x_p(t) + B_{pm} u_m(t) + B_{pz} u_z(t) \\ y(t) &= C_p x_p(t) + D_{pm} u_m(t) + D_{pz} u_z(t) \end{aligned}\right\} \quad \textit{folyamat}$$

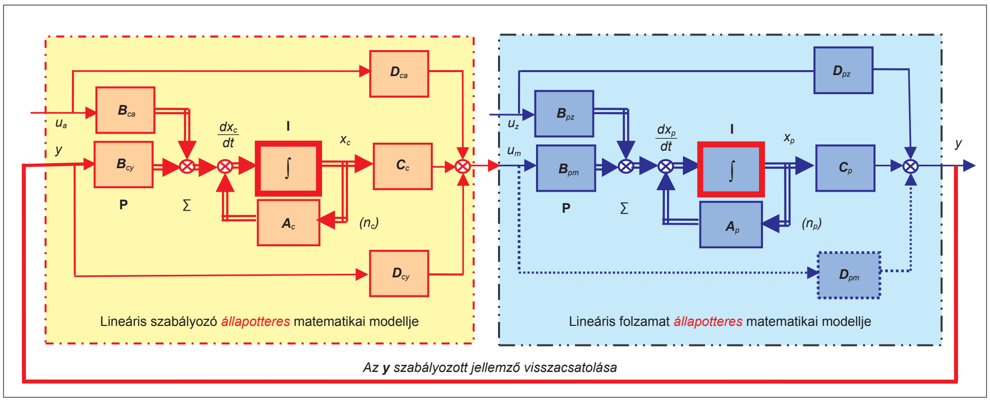
$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_c(t)}{dt} &= A_c x_c(t) + B_{ca} u_a(t) + B_{cy} y(t) \\ u_m(t) &= C_c x_c(t) + D_{ca} u_a(t) + D_{cy} y(t) \end{aligned}\right\} \quad \textit{szabályozó}$$

Ezekben az egyenletekben az *A, B, C, D* paraméterek a lineáris alrendszerek paramétermátrixai. A lineáris állapotegyenletek matematikai modelljeivel[5] leírt **lineáris rendszernek** egységes,

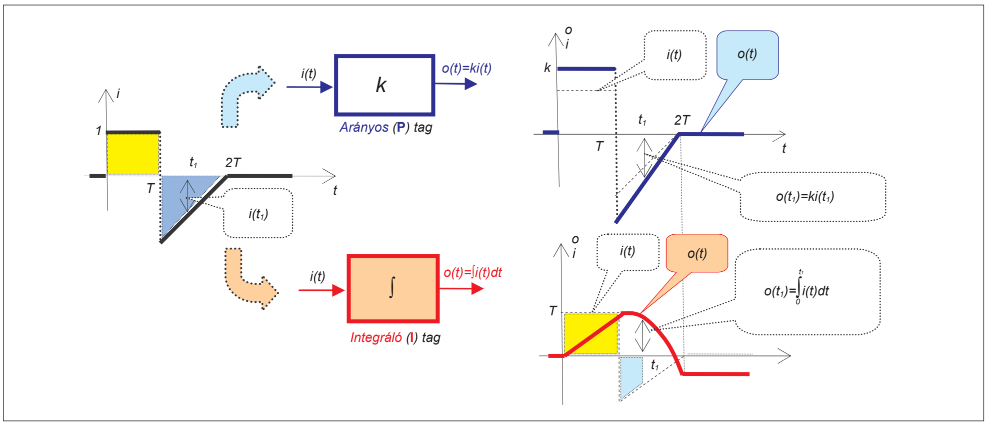
---

5 A jelek és a paraméterek jellemzői: $x_p(t)$, $x_c(t)$: n_p, és n_c méretű oszlopvektorok, $y(t)$, $u_m(t)$, $u_a(t)$, $u_z(t)$: skaláris mennyiségek, $\boldsymbol{A_p}$, $\boldsymbol{A_c}$: n_p, n_c méretű négyzetes mátrixok, B_p $(n_p \times 1)$, B_c $(n_c \times 1)$: oszlopvektorok, C_p $(1 \times n_p)$, C_c $(1 \times n_c)$: sorvektorok, D_p, D_c: skaláris paraméterek.

jól kidolgozott rendszerelmélete van, amelynek eredményei a nemlineáris rendszerek néhány osztályában is felhasználhatók. Ha az egyensúlyi pontban a nemlineáris függvények linearizálhatóak, akkor ennek „kis” környezetében lejátszódó tranziensek matematikai modellezésére is egy közelítő lineáris állapotegyenlet modellel dolgozhatunk. A lineáris szabályozási rendszer hatásvázlata az alrendszerek állapotegyenleteinek alapján építhető fel. Az integráló tagok bemenetein a $dx_c(t)/dt$, $dx_p(t)/dt$ állapotsebességeket működtetve, ezek kimenetein az állapotsebességek integráljai, vagyis maguk az $x_c(t)$, $x_p(t)$ állapotváltozók jönnek létre, hasonlóan, mint ahogy ezt a nemlineáris rendszereknél láttuk. Az állapotsebességek jelen esetben – az f_c és f_p lineáris függvénykapcsolatnak megfelelően – az integrátorok kimenetein megjelenő állapotváltozók, és az alrendszerek bemenő jeleinek *lineáris kombinációi*. A szabályozóberendezés és a folyamat alrendszereinek kimenő jelei – a g_c, g_p lineáris függvényeknek megfelelően – szintén az állapotváltozókból és a bemenő jelekből állíthatók elő. A két alrendszer most is azzal kapcsolódik össze, hogy a szabályozó $u_m(t)$ kimenő jele egyben a folyamat egyik bemenő jele, illetve a folyamat $y(t)$ kimenő jele egyben a szabályozó egyik bemenő jele[6]. Mindezek a tulajdonságok az állapotegyenletekkel egyenértékűen, a lineáris rendszer hatásvázlatán is szemléltethetők (3. ábra).



3. ábra A lineáris szabályozás dinamikus alrendszereinek leírása lineáris állapotegyenletekkel



4. ábra Arányos és integráló tag adott u(t) bemenő jelre keletkező y(t) válaszainak összehasonlítása

A lineáris rendszer tulajdonságai

A lineáris szabályozás hatásvázlatnak lényeges tulajdonsága, hogy struktúrája **P** (proporcionális, arányos), **I** (integráló), és **Σ** (összegző) **lineáris alaptagokból** épül fel. Az arányos tagok időkésleltetés nélkül állítják elő az *i(t)* bemenő (**i**nput) jeleikkel arányos *o(t)* kimenő (**o**utput) jeleiket: $o(t)=Ki(t)$, az összegző tagok kimenő jelei a bemenő jeleiknek az összege: $o(t)=\Sigma i_i(t)$.

Alapvetően különböző az integráló tag jelátviteli tulajdonsága, miután ennek *o(t)* kimenő jele az *i(t)* bemenő jelének az idő szerinti integrálja: $o(t)=o_0+\int i(t)dt$ (o_0 a kezdeti feltétel). Ebből pedig az is következik, hogy **az I tag *o(t)* kimenő jele csak akkor lehet állandó, ha *i(t)* bemenő jele zérus. Ezzel szemben, ha a bemenő jel $i(t)=i_0$ állandó, az I tag kimenő jele az időben lineárisan változik: $o(t)=o_0+\int i_0dt=o_0+i_0t$.** Az integráló tag ***dinamikus*** alaptag. Az integráló tag szerepe különlegesen jelentős, mivel ez a lineáris és nemlineáris dinamikus rendszerek mindegyikében szükségszerűen jelen van[7].

Az integráló tag néhány fontos tulajdonsága:

- ***kimenő jele akkor lehet állandó, ha bemenő jele zérus,***
- *kimenő jele bizonyosan változik, ha bemenő jele nem zérus,*
- *kimenő jele véges bemenő jel ugrására az ugrás pillanatában* ***változatlan*** *marad,*
- *kimenő jele időben lineárisan növekszik, ha bemenő jele* i_0*=állandó>0,*
- *kimenőjelének a* ***változási sebessége*** *az* i_0 *bemenő jellel arányos,*
- *kimenő jelének a* t_1 *időpontban felvett* $o(t_1)$ *értéke az i(t) bemenő jelnek a teljes „előéletétől” (a* $-\infty<t<t_1$ *időpontokban felvett értékeitől) függ.*

A P és I tag jelátviteli tulajdonságainak összehasonlítását a 4. ábrán szemléltetjük.

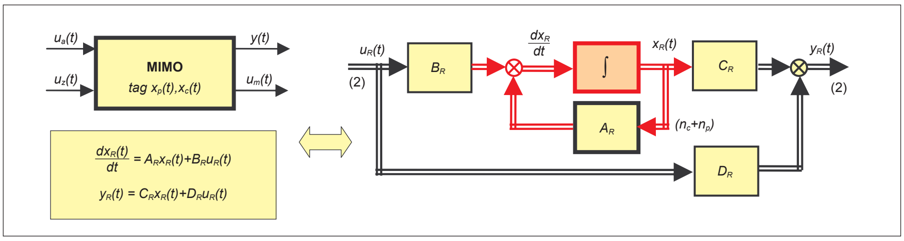
A hatásvázlat P és Σ tagjai algebrai tagok, az I tagok dinamikus tagok. Figyeljük meg, hogy az alrendszerek integráló tagjai az A_c, és A_p arányos tagokkal vannak visszacsatolva, ezek a belső visszacsatolások jelenítik meg a szabályozó és a folyamat jelkésleltetéseit (A_c a szabályozó, A_p a folyamat **állapotmátrixai**). Az *y* szabályozott jellemző *negatív visszacsatolása* a szabályozó bemenetére a „fő” visszacsatolás, ennek eredménye a zárt hatáslánc. A hatásvázlat alapján megfigyelhetjük, hogy az u_a alapjel, vagy az *y* szabályozott jellemző hirtelen (ugrásszerű) megváltozására a szabályozó az u_m módosított jellemzőt időkésleltetés nélkül, azonnal megváltoztatja, ha a D_{ca} és a D_{cy} tényezők nem zérusok. Ez a szabályozónak egy kedvező tulajdonsága, mivel a bemenő jeleinek megváltozására a kimenő jel megváltozásával időkésleltetés nélkül képes reagálni. A folyamatok jelentős részében ettől eltérően, az u_m módosított jellemző ugrásszerű megváltozására az *y* szabályozott jellemző csak időkésleltetéssel reagál, ezért általában a folyamat D_{pm} paramétere $D_{pm}=0$.

[6] Ha a szabályozóberendezés és a folyamat *önbeálló* tulajdonságú, akkor létezik ezek mindegyikének a statikus karakterisztikája, amely karakterisztika – lineáris rendszer esetében – u_a-ban, illetve u_z-ben paraméterezett egyenes. A karakterisztikák meredekségeinek szorzata az arányos szabályozás huroktényezője.

[7] A nemlineáris rendszerekben a *lineáris alaptagokon* túlmenően az $o=f(i)$ nemlineáris algebrai függvénykapcsolatot szimbolizáló nemlineáris tagok (függvénygenerátorok), illetve nemlineáris matematikai műveleteket végző tagok (szorzó, hányados képző stb.) is szerepet játszanak. A *dinamikus* rendszer *n* rendszáma az integráló tagok számával azonos, ezek minimális száma egy.

Megjegyzés:

A hatásvázlat tanulmányozásával láthatjuk, hogy $D_{cy}D_{pm}\neq 0$ mellett a hatáslánc előrevezető ágában az $\boldsymbol{y(t)}\rightarrow D_{cy}\rightarrow u_m(t)\rightarrow D_{pm}\rightarrow \boldsymbol{y(t)}$ útvonalon a rendszerben keletkezik egy algebrai tagokat tartalmazó visszacsatolt hurok (algebrai hurok). Ez elvileg a rendszer stabilitásában jelentős problémák okozója lehet. A gyakorlati esetekben előforduló technológiai folyamatok modelljeiben azonban $D_{pm}=0$, ami ezt az algebrai hurkot mintegy felszakítja.



5. ábra Az eredő lineáris rendszer állapotegyenlete és hatásvázlata

A lineáris szabályozás hatásvázlatából láthatóan a zárt rendszernek két bemenőjele $[u_a(t),u_z(t)]$, két kimenőjele $[y(t),u_m(t)]$, és n_p számú $x_p(t)$, illetve n_c számú $x_c(t)$ állapotváltozója van. (**MIMO** **m**ulti **i**nput, **m**ulti **o**utput rendszer). Ha az állapotváltozókat az $x_R(t)=[x_p(t)\ \ x_c(t)]^T$, a bemenő jeleket $u_R(t)=[u_a(t)\ \ u_z(t)]^T$, a kimenő jeleket pedig az $y_R(t)=[y(t)\ \ u_m(t)]^T$ oszlopvektorokba összevonjuk[8], akkor az eredő visszacsatolt rendszer állapotegyenletét is felírhatjuk. Ennek alakja és az ehhez rendelhető hatásvázlat az 5. ábrán látható.

Az eredő visszacsatolt rendszert is egy normál alakban felírható állapotegyenlet jellemzi, amely az adott esetben n_p+n_c számú, elsőrendű lineáris differenciálegyenletet tartalmazó differenciálegyenlet rendszerből és két db. lineáris algebrai egyenletből áll. Az eredő rendszer $\boldsymbol{A_R}$, $\boldsymbol{B_R}$, $\boldsymbol{C_R}$, $\boldsymbol{D_R}$ paramétermátrixai a folyamat A_p, B_p, C_p, D_p, és a szabályozó A_c, B_c, C_c, D_c paramétereiből határozhatók meg. Az eredő rendszer dinamikus viselkedését az integráló tag $\boldsymbol{A_R}$ állapotmátrixon keresztül történő visszacsatolása determinálja, amiben az alrendszerek (a folyamat és a szabályozó) saját dinamikája és az y szabályozott jellemző negatív visszacsatolása is megjelenik. Ennek az állapotegyenletnek adott $u_R(t)$ gerjesztésre és $x_R(0)$ kezdeti feltételre vonatkozó $x_R(t)$, $y_R(t)$ megoldására jól kidolgozott **analitikus** és **numerikus** (számítógépes) módszerek vannak. Az eredő rendszer időtartományban történő analízisét esősorban állapotegyenletre alapozhatjuk. Ennek nagy előnye, hogy a kimenő jeleken túlmenően az állapotváltozók időfüggvényeit is szolgáltatja. A lineáris rendszerek tranziens folyamatai analitikusan kezelhetők, vagyis adott $u_a(t)$ és $u_z(t)$ gerjesztő jelekre keletkezett $y(t)$ és $u_m(t)$ válasz időfüggvényeknek van matematikailag levezethető, analitikus megoldó képlete.

Az aszimptotikus stabilitás

A szabályozási rendszer eredő hatásvázlatát szemlélve alapvető elvárás, hogy állandó $u_R(t)=u_{R0}$ bemenő jelek hatásának kitett szabályozásban $t\rightarrow\infty$ mellett létrejöjjön az $y_R(t)$ kimenő jeleknek egy $y_R(\infty)=y_{R0}$ állandósult értéke. Mivel $y_R(t)=C_Rx_R(t)+D_Ru_{R0}$, ezért ennek az egyensúlyi helyzet kialakulásának az is feltétele, hogy az $x_R(t)$ állapotváltozóknak is létrejöjjön az $x_R(\infty)=x_{R0}=\textit{állandó}$ értéke. Ez utóbbi viszont csak akkor lehetséges, ha az integráló tagok bemenő jelei (a $dx_R(t)/dt$ állapotsebességek) $t\rightarrow\infty$ mellett zérushoz tartanak, mivel az integráló tagok kizárólag zérus bemenő jel mellett képesek „nyugalmi" helyzetbe kerülni, amikor is kimenetükön az álladó x_{R0} jön létre. Ha ez az üzemállapot létrejön, az eredő lineáris rendszer **aszimptotikusan stabilis**.

A hatásvázlatból kiolvashatóan ennek az állapotnak létrejöttét kizárólag az $\boldsymbol{A_R}$ állapotmátrix befolyásolja. Az eredő állapotegyenlet alapján a visszacsatolt rendszer aszimptotikus stabilitásának feltétele matematikailag is megfogalmazható: **aszimptotikusan stabilis**[9] **a szabályozási rendszer, ha az $\boldsymbol{A_R}$ eredő állapotmátrixának minden $\boldsymbol{\lambda_{Ri}}$ sajátértékére a *real*($\boldsymbol{\lambda_{Ri}}$)<0 feltétel fennáll.** Az aszimptotikusan stabilis lineáris rendszer esetében, az állandó $u_R(t)=u_{R0}$ hatására keletkező $x_R(t)$, $y_R(t)$ jelek $x_R(\infty)=x_{R0}$, és $y_R(\infty)=y_{R0}$ állandósult értékei:

$$\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=\infty} = 0 = A_R x_R(\infty) + B_R u_{R0} \;\Rightarrow$$

$$x_R(\infty) = x_{R0} = -A_R^{-1} B_R u_{R0}$$

$$y(t)\big|_{t=\infty} = C_R x_R(\infty) + D_R u_{R0} \;\Rightarrow$$

$$y_R(\infty) = y_{R0} = \left[-C_R A_R^{-1} B_R + D_R\right] u_{R0}$$

A lineáris rendszerekre érvényes a **szuperpozíció elve.** Ennek egyik jelentése például az, hogy abban az esetben, ha az $u_a(t)$ és $u_z(t)$ gerjesztésekre külön-külön meghatározzuk az $y_a(t)$, $y_z(t)$ és $u_{ma}(t)$, $u_{mz}(t)$ részválaszokat, akkor ezek $y(t)=y_a(t)+y_z(t)$ és $u_m(t)=u_{ma}(t)+u_{mz}(t)$ összegeként áll elő a rendszer eredő válasza, ha $u_a(t)$ és $u_z(t)$ egyidejűleg lépnek fel a rendszer bemenetein.

A lineáris rendszerek egyfajta vizsgálati módszere (a **frekvenciamódszer**) azon alapszik, hogy a gerjesztő jelek egy osztálya $0<\omega<\infty$ körfrekvenciájú, különböző amplitúdójú és fázisú *harmonikus* jelekre bonthatók fel, vagyis ezek komponenseiből tevődnek össze. Ha a különböző frekvenciájú komponensekre adott részválaszokat meghatározzuk, akkor az eredeti gerjesztésre adott válasz a részválaszok összegeként adódik. A frekvenciamódszer alapján a gyakorlati tervezésben is jól alkalmazható tervezési eljárások keletkeztek.

A szabályozástechnikai alapfogalmak áttekintése során a következő részben a lineáris rendszer tulajdonságainak a vizsgálatát az állapotegyenletek és a Laplace-transzformáció segítségével elemezzük, majd rátérünk a lineáris rendszerek stabilitásvizsgálatára, és a szabályozóberendezéssel szemben támasztott követelmények ismertetésére.

(Folytatjuk!)

szbela@iit.bme.hu
juhaszne@iit.bme.hu

[8] T a transzponálás jele, az adott alkalmazásban sorvektorból oszlopvektort állít elő.

[9] Aszimptotikusan stabilis a lineáris rendszer, ha $u_a(t)=u_z(t)=\delta(t)$ *Dirac*-delta gerjesztésre adott $y(t)$, $u_m(t)$ válaszai $t\rightarrow\infty$ mellett zérushoz tartanak. Ezzel egyenértékű megfogalmazás: aszimptotikusan stabilis a lineáris rendszer, ha $u_a(t)=u_z(t)=\mathbf{1}(t)$ egységugrás gerjesztésre adott $y(t)$, $u_m(t)$ válaszai $t\rightarrow\infty$ mellett $y(\infty)=y_0=\textit{állandó}$, $u_m(\infty)=u_{m0}=\textit{állandó}$ értékhez tartanak, vagyis a rendszer önbeálló.