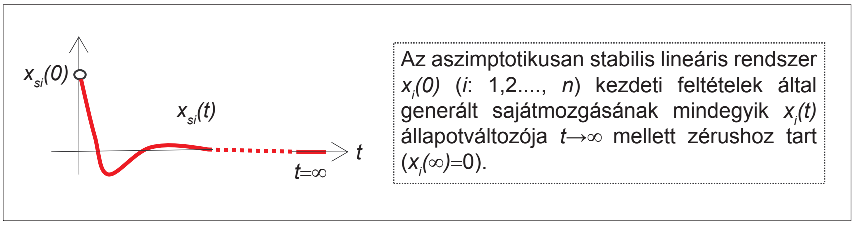
Szabályozástechnika – 8.

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencné

A cikksorozat következő részében folytatjuk a dinamikus rendszer matematikai modelljének az elemzését a lineáris rendszer aszimptotikus stablitásának, valamint a SISO-jelátvivő tag rendszerjellemző függvényeinek a vizsgálatával, majd összefoglaljuk a *Laplace* integrál-transzformáció használatát a dinamikus rendszer analízisében.

A lineáris rendszer aszimptotikus stabilitása

A rendszer aszimptotikus stabilitásának egyik megfogalmazása[1]: aszimptotikusan stabilis az állapotegyenletével leírt lineáris rendszer, ha gerjesztetlen ($u(t)=0$) állapotában az $x(0)$ által generált $x_s(t)$ sajátmozgása $t\to\infty$ mellett zérushoz tart (lásd 1. ábra). Ekkor ugyanis az $u=0$ bemenőjelnek megfelelően az $y(t)=Cx(t)+Du(t)$ kimenőjel értéke is $t\to\infty$ mellett zérus értéket vesz fel. Matematikailag is kifejezve:



1. ábra. Aszimptotikusan stabilis rendszer sajátmozgása

$$\underbrace{\lim}_{t\to\infty} x_s(t)=\underbrace{\lim}_{t\to\infty} e^{At}x(0)=\underbrace{\lim}_{t\to\infty}\phi(t)x(0)=0$$

Ez a feltétel akkor teljesül, ha az ***A* állapotmátrix minden λ_i sajátértékének valós része negatív szám:**

real $\lambda_i<0$, ($i=1,2, \ldots,n$)[2].

Ha a rendszert az **LDE** matematikai modelljével írjuk le, akkor a stabilitásnak az előzőekkel egyenértékű feltétele, hogy az ***$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots a_{n-1}\lambda+a_n=0$ karakterisztikus egyenletnek kizárólag negatív valósrészű $\lambda_i=p_i$ gyökei legyenek*** (a $\lambda_i=p_i$ gyökök a dinamikus rendszer pólusai). A kétféle, **LDE-** és **LÁE-**modell – az $y(t)$ kimenőjel meghatározásának szempontjából – egymással egyenértékű, de az állapotegyenlet „gazdagabb", mert megoldása az $y(t)$ kimenőjelen túlmenően a dinamikus rendszer n számú:

$x_1(t)$, $x_2(t)$, ... $x_n(t)$

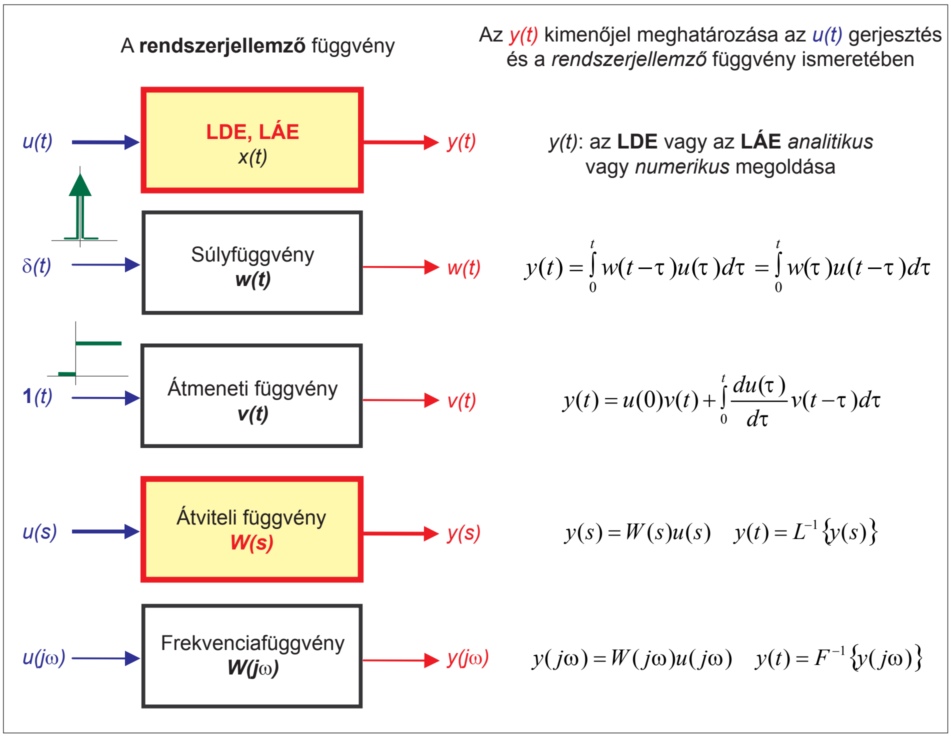
állapotváltozóit is szolgáltatja.

A SISO jelátvivő tag rendszerjellemző függvényei

A rendszerjellemző függvények segítségével írjuk le a dinamikus rendszer viselkedését. Bármelyikük ismerete lehetővé teszi, hogy tetszőleges $u(t)$ bemenőjelre az $y(t)$ kimenőjelválaszt meghatározzuk. Ez a tulajdonság a lineáris rendszerre érvényes szuperpozíció elvből származik[3]. A rendszerjellemző függvények (lásd 2. ábra):

1. A **differenciálegyenlet** (**LDE**) vagy az ennek megfelelő **állapotegyenlet** (**LÁE**).

2. ábra. Lineáris tag rendszerjellemző függvényei



---

1 Egy ezzel egyenértékű másik megfogalmazás: **aszimptotikusan stabilis az állapotegyenletével leírt lineáris rendszer, ha az $u(t)=1(t)$ által keltett $x_g(t)$ gerjesztett mozgása $t\to\infty$ mellett állandó értékhez tart** (ekkor az $u(\infty)=1$ bemenőjelnek megfelelően az $y(t)$ kimenőjel értéke is $t\to\infty$ mellett $y(\infty)$=állandó értéket vesz fel).

2 Az ***A*** állapotmátrix λ_i sajátértékei a mátrix $det(\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A})=0$ karakterisztikus egyenletének a gyökei. Ha $A=a$ skaláris, a rendszer elsőrendű, karakterisztikus egyenlete $det(\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A})=\lambda-\mathbf{a}=0$, és ekkor $\lambda=a$.

3 A szuperpozíció elvének egy alkalmazása: ha a lineáris **SISO-**rendszer $u(t)$ gerjesztése periodikus időfüggvény, akkor ez harmonikus ($u_i(t)=a_i sin(\omega_i t)+b_i cos(\omega_i t)$ komponenseket tartalmazó) jelek összegeként is előállítható. Ha minden $u_i(t)$ harmonikus bemenőjel komponensre meghatározzuk az $y_i(t)$ harmonikus kimenőjel választ, akkor az eredeti $u=\Sigma\, u_i(t)$ bemenőjelre adott y válasz a kimenőjel részválaszainak komponenseiből tevődik össze: $y=\Sigma y_i(t)$.

2. A **súlyfüggvény** (*impulse response*): az $u(t)=\delta(t)$ (*Dirac*-deltára) adott $y(t)=\mathbf{w}(t)$ válasz, zérus kezdeti feltételek mellett.
3. Az **átmeneti függvény** (*step response*): az $u(t)=\mathbf{1}(t)$ egységugrásra adott $y(t)=\mathbf{v}(t)$ válasz, zérus kezdeti feltételek mellett.
4. Az **átviteli függvény** (*transfer function*): a $w(t)$ súlyfüggvény $L\{w(t)\}=\mathbf{W}(s)$ *Laplace*-transzformáltja, vagy az $y(t)$ kimenőjel és az $u(t)$ bemenőjel *Laplace*-transzformáltjainak $W(s)=y(s)/u(s)$ hányadosa, zérus kezdeti feltételek mellett.
5. A **frekvenciafüggvény** (*frequency response*): a $w(t)$ súlyfüggvény $F\{w(t)\}=\mathbf{W}(j\omega)$ *Fourier*-transzformáltja, vagy az $u(t)$ bemenőjel és az $y(t)$ kimenőjel *Fourier*-transzformáltjainak $W(j\omega)=y(j\omega)/u(j\omega)$ hányadosa, zérus kezdeti feltételek mellett.

A $v(t)$ átmeneti függvény és a $W(j\omega)$ frekvenciafüggvény kísérletileg is meghatározható, és ezeknek birtokában minden más rendszerjellemző függvény (például a dinamikus rendszer állapotegyenlete is) kiszámítható. Ez az eljárás a dinamikus rendszer *identifikációja* az átmeneti-, ill. a frekvenciafüggvényei alapján[4].

Laplace integrál-transzformáció használata a dinamikus rendszer analízisében

A *Laplace* transzformáció

A *Laplace* transzformáció az $f(t)$ belépő időfüggvényhez ($f(t)=0$, ha $t<0$) egy $F(s)$ operátorfüggvényt[5] rendel, ill. az $f(t)$ függvényt a – definíciós egyenletével – az $F(s)$ függvényre képezi le, tehát függvények függvénye, vagyis ún. funkcionál. A transzformáció definíciós egyenlete az

$$f(t) \quad \Rightarrow \quad L\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

improprius integrál[6]. A szabályozási rendszerek analízisében gyakran előforduló belépő időfüggvények transzformáltjait az irodalomban található *Laplace* transzformációs táblázatok tartalmazzák[7].

4 A dinamikus **LTI**-rendszerek analízisére, differenciálegyenleteinek megoldására és szimulációjára, a rendszerjellemző függvények meghatározására és ábrázolására többféle számítógépes támogatás létezik. Jelen munkában a **MATLAB®** nyújtotta lehetőségeket használjuk. A **MATLAB** mérnöki számításokra kifejlesztett programcsomag. Jelentősen támogatja a különféle matematikai feladatok (például: függvénytan, komplex függvénytan, mátrixalgebra, differenciálegyenletek stb.) feldolgozását. Különböző *toolboxai* (például: ***Control System Toolbox,*** *Nonlinear Control Design Blockset, Robust Control Toolbox, Fuzzy Logic Toolbox, System Identification Toolbox* stb) a szabályozástechnikai feladatok megoldását segíti. A **SIMULINK** programcsomag dinamikus rendszerek szimulációs vizsgálatában jelent komoly támogatást, eredményeit – további feldolgozásra – képes a **MATLAB** felületre átadni. A *Simbolic Math Toolbox* szimbolikus matematikai számításokat tesz lehetővé. Hasonló programok: **MAPLE®**, **Lab VIEW®**, **MATHEMATICA®**.

5 Az $L\{f(t)\}=F(s)$ jelölés mellett – alkalmanként, az egyszerűség céljából – az $L\{f(t)\}=f(s)$ jelölést is használjuk. Az $f(s)$ jelölés természetesen nem azt jelenti, hogy az $f(t)$ időfüggvény t változóját az s változóra kell cserélni, hanem $f(s)$ a definíciós képlettel számolandó!

6 A definíciós kifejezésben a t időváltozóra vonatkozó határozott integrál eredményeként az időváltozó „mintegy eltűnik”, és helyére az s változó lép be.

7 A *Laplace* transzformációs táblázatokban szereplő $f(t)$ időfüggvények $L\{f(t)\}=F(s)$ transzformáltjait a definíciós integrálképlettel lehet meghatározni. Például az $f(t)=\delta(t)$ *Dirac* impulzus, az $f(t)=\mathbf{1}(t)$ ugrásfüggvény és az $f(t)=e^{at}$ exponenciális függvény *Laplace* transzformáltjai.

$$L\{\delta(t)\}=\int_{t=0}^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt=1,\ L\{1(t)\}=\int_{t=0}^{\infty}1(t)e^{-st}dt=\int_{t=0}^{\infty}e^{-st}dt=\frac{1}{-s}e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\infty}=\frac{1}{-s}(0-1)=\frac{1}{s},\ L\{e^{at}\}=\int_{t=0}^{\infty}e^{-(s-a)t}dt=\frac{1}{s-a}$$

ha $real(s-a)>0$.

A transzformáltakat tartalmazó táblázatokból megfigyelhetjük, hogy a transzformált $L\{f(t)\}=F(s)$ függvények az $s=\sigma+j\omega$ komplex változónak általában algebrai törtjei (algebrai tört: polinomok hányadosaiból képzett törtfüggvény). Kivétel ez alól például az időben eltolást tartalmazó $\delta(t-T)$ eltolt *Dirac* impulzus transzformáltja, amely transzcendens kifejezés:

$$L\{\delta(t-T)\}=\int_0^\infty \delta(t-T)e^{-st}dt=e^{-sT} \quad T>0$$

IRODALOM: I. N. Bronstejn–K. A. Szemengyajev: Matematikai Zsebkönyv, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1987

Az inverz *Laplace* transzformáció

Az inverz transzformáció az $F(s)$ transzformált függvényhez az $f(t)$ időfüggvényt rendeli. Definíciós kifejezése:

$$F(s) \quad \Rightarrow \quad L^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{st}ds=f(t).$$

Az $F(s)e^{st}$ komplex függvény vonal menti integráljának tényleges kiszámítása visszavezethető egy zárt görbe menti integrál kiértékelésére, amely *Cauchy*-tétele alapján történhet[8]. Legyen $F(s)=G(s)/H(s)$ algebrai tört[9] és $G(s)$ az s operátor m fokszámú, $H(s)$ az s operátor n fokszámú ($n\geq m$) polinomjai. A $H(s)=0$ egyenlet k_i multiplicitású p_i gyöke az $F(s)$ szinguláris helye (pólusa). Ekkor:

$$F(s)=\frac{G(s)}{H(s)}=\frac{g_0s^m+g_1s^{m-1}+\cdots+g_{m-1}s+g_m}{s^n+h_1s^{n-1}+\cdots+h_{n-1}s+h_n}$$

$$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{st}ds=$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c F(s)e^{st}ds=\sum_{(p_i)}rezF(s)e^{st}$$

$$\underbrace{rez}_{p_i}F(s)e^{st}=\underbrace{\lim}_{s\to p_i}\frac{1}{(k_i-1)!}\frac{d^{k_i-1}}{ds^{k_i-1}}\left[(s-p_i)^{k_i}\frac{G(s)}{H(s)}e^{st}\right]$$

Ha a $H(s)=0$ minden p_i gyöke egymástól különböző, valamint $H(s)$ n fokszáma $G(s)$ m fokszámánál nagyobb ($n>m$), akkor az $F(s)$ algebrai tört $r_i/(s-p_i)$ komponensekből álló részlettörtekre bontható, vagyis:

$$F(s)=\frac{G(s)}{H(s)}=\frac{G(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\sum_{i=1}^n\frac{r_i}{s-p_i}$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\sum_{i=1}^n\frac{r_i}{s-p_i}\right\}=\sum_{i=1}^n r_ie^{p_it}.$$

A *Laplace* transzformáció néhány fontosabb tétele

1. A *Laplace* transzformáció és az inverz transzformáció ***lineáris*** művelet:

$$L\{ax(t)+bu(t)\}=ax(s)+bu(s)$$
$$L^{-1}\{cy(s)+du(s)\}=cy(t)+du(t)$$

(a, b, c és d állandók).

2. Az $x(t)$ tárgyfüggvény idő szerinti $dx(t)/dt$ deriváltjának transzformáltja (a differenciálási szabály[10]):

$$L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}=sL\{x(t)\}-x(0)=sx(s)-x(0)$$

8 Az $F(s)e^{st}$ függvénynek a komplex számsík egy zárt c görbe mentén vett vonalintegrálja zérus, ha a függvény a görbe által határolt tartományban analitikus. Ha viszont az $F(s)e^{st}$ függvénynek a c által határolt tartományban szinguláris pontjai vannak, akkor az integrál a residuum-tétel alapján számítható ki. A definíciós kifejezésben az s változóra vonatkozó határozott integrál eredményeként az s operátorváltozó „mintegy eltűnik”, és helyére a t időváltozó lép be.

9 Az $F(s)=G(s)/H(s)$ algebrai tört a $H(s)$ nevezőjének vezető együtthatójára normalizált ($h_0=1$).

10 Az 1. és 2. tétel alapján lehet a dinamikus rendszer differenciálegyenlet alakjában felírt matematikai modelljét algebrai egyenletre egyszerűsíteni.

Ha $x(0)=0$, akkor $L\{dx(t)/dt\}=sx(s)$ $\rightarrow$ (***s a differenciálás operátora.*** Az operátortartományban az s változóval történő szorzásnak az időtartományban az idő szerinti differenciálás felel meg).

3. Eltolási tétel ($T>0$):

$$L\{u(t-T)\}=e^{-sT}u(s) \qquad T>0$$

4. Tárgyfüggvény integráljának transzformáltja (az integrálási szabály):

$$L\left\{\int_0^t x(\tau)d\tau\right\}=\frac{x(s)}{s}$$

(**1/*s*** az ***integrálás operátora.*** Az s operátortartományban az **1/*s*** kifejezéssel történő szorzásnak a t időtartományban az idő szerinti integrálás felel meg: $x(s)/s$ $\rightarrow$ $\int x(t)dt$).

5. A konvolúció tételei[11]:

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}=F(s)G(s)$$

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

6. Kezdeti- és végérték tételek:

$$\underbrace{\lim}_{t\to 0} f(t)=f(0)=\underbrace{\lim}_{s\to\infty} sF(s)$$

$$\underbrace{\lim}_{t\to\infty} f(t)=f(\infty)=\underbrace{\lim}_{s\to 0} sF(s) \quad \text{ha} \quad \operatorname{Re} p_i<0\,!!!$$

A lineáris differenciálegyenlet megoldása *Laplace* transzformációval

A *Laplace* transzformáció alapvető sajátossága, hogy a lineáris dinamikus rendszereknek a *„t" időtartományban differenciálegyenletekkel* adott matematikai modelljét az *„s" operátortartományban algebrai egyenletekké* lehet egyszerűsíteni. Ez a tulajdonság a transzformáció *linearitási* tételeiből és a *differenciálási* szabályából származtatható.

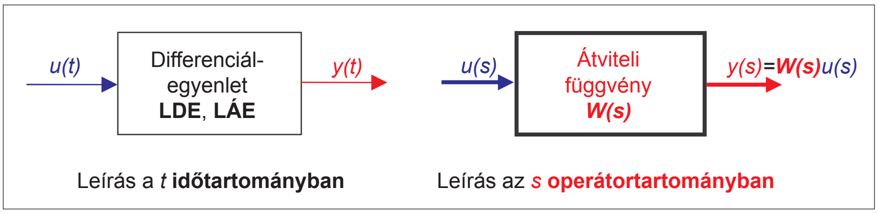
SISO tag differenciálegyenletének megoldása. Az átviteli függvény

Az egybemenetű, egykimenetű – **SISO** taggal absztrahált – dinamikus rendszert jellemezzük az $u(t)$ bemenő- és $y(t)$ kimenőjelű jelátvivő taggal (lásd 3. ábra).

A vezető együtthatóra normalizált ($h_0=1$) differenciálegyenlet (**LDE**):

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+h_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+h_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+h_n y(t)=$$
$$=g_0\frac{d^m u(t)}{dt^m}+g_1\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+g_{m-1}\frac{du(t)}{dt}+g_m u(t)$$

[11] Legyen $L\{w(t)\}=W(s)$, $L\{u(t)\}=U(s)$. Ekkor a $W(s)U(s)$ szorzat $L^{-1}\{W(s)U(s)\}$ inverz *Laplace* transzformáltja **nem** $w(t)u(t)$ (vagyis nem a $W(s)$ és $U(s)$ inverz transzformáltjainak szorzata), hanem $\boldsymbol{L^{-1}\{W(s)U(s)\}=\int w(\tau)u(t-\tau)d\tau}$!!!



3. ábra. Jelátvivő tag leírása az idő- és az operátortartományban

Zérus kezdeti feltételekkel képezve a differenciálegyenlet mindkét oldalának *Laplace* transzformáltját, algebrai egyenletet kapunk, amiből a kimenő jel $y(s)$ transzformáltja meghatározható:

$$y(s)=\frac{g_0 s^m+g_1 s^{m-1}+\cdots+g_{m-1}s+g_m}{s^n+h_1 s^{n-1}+\cdots+h_{n-1}s+h_n}u(s)=W(s)u(s)$$

A kifejezésben szereplő

$$W(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{g_0 s^m+g_1 s^{m-1}+\cdots+g_{m-1}s+g_m}{s^n+h_1 s^{n-1}+\cdots+h_{n-1}s+h_n}=\frac{G(s)}{H(s)}$$

algebrai tört a jelátvivő tag **átviteli függvénye**[12]. A lineáris szabályozási rendszerek analízisében az **átviteli függvénynek meghatározó jelentősége van**. Az átviteli függvény nevezőjéből képzett $H(s)=0$ karakterisztikus egyenlet p_i gyökei (i: 1,2,…,n) határozzák meg a $W(s)$ átviteli függvény szingularitásait[13], a jelátvivő tag dinamikus tulajdonságát, stabilis vagy labilis voltát. Az átviteli függvény definíciója:

Az egybemenetű, egykimenetű, lineáris **SISO** tag ***W(s)*** átviteli függvénye az $y(t)$ kimenő- és az $u(t)$ bemenőjelek $y(s)/u(s)$ *Laplace* transzformáltjának hányadosa, zérus kezdeti feltételek mellett. Vagy ezzel egyenértékűen: az átviteli függvény a tag ***w(t)*** súlyfüggvényének *Laplace* transzformáltja:

$$\boldsymbol{W(s)=y(s)/u(s)=L\{w(t)\}}.$$

Az $y(t)$ kimenőjelet $W(s)$ és $u(s)$ ismeretében a *Laplace* transzformáció konvolúció tétele alapján számíthatjuk:

$$y(s)=W(s)u(s) \quad\Rightarrow\quad w(t)=L^{-1}\{W(s)\} \quad u(t)=L^{-1}\{u(s)\}$$

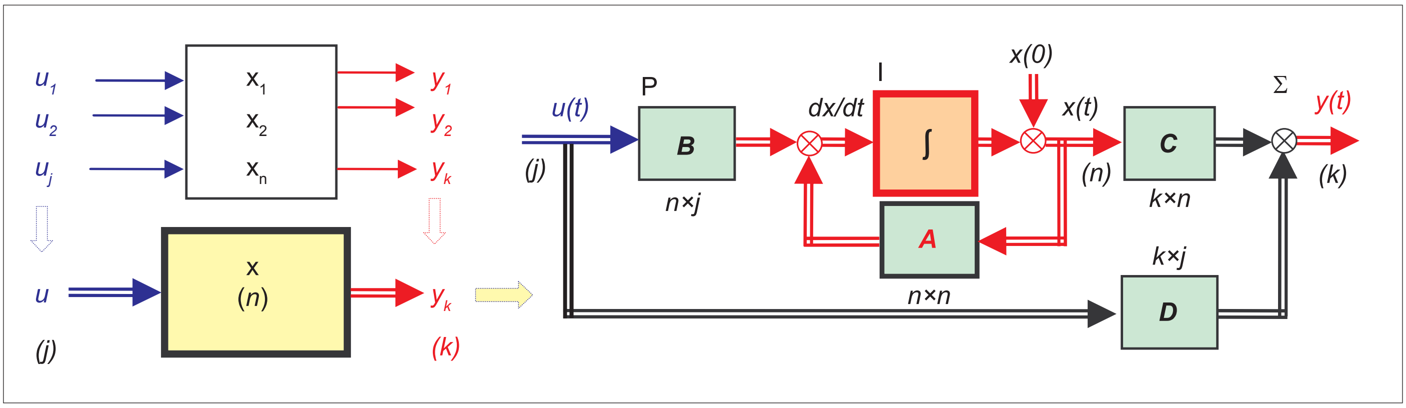
$$y(t)=L^{-1}\{W(s)u(s)\}=\int_0^t w(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_0^t w(t-\tau)u(\tau)d\tau\,,$$

ahol $w(t)$ a dinamikus tag súlyfüggvénye[14].

[12] Realizálható az átviteli függvény, ha $n\geq m$. A realizálhatóság azt jelenti, hogy fizikailag létrehozható olyan dinamikus rendszer, amely az adott átviteli függvénnyel leírható. Az n rendű lineáris differenciálegyenlet h_k (k=0,1,...,n) és g_k (k=0,1,...,m) együtthatóinak ismeretében a tag $W(s)$ átviteli függvénye közvetlenül felírható. Ez fordítva is alkalmazható: a $W(s)=G(s)/H(s)=y(s)/u(s)$ ismerete alapján a $H(s)y(s)=G(s)u(s)$ alakból a **SISO** tag differenciálegyenlete adható meg. Az operátortartományban az s változóval való szorzásnak az időtartományban az idő szerinti differenciálás felel meg, ezért $s^i y(s) \rightarrow (d/dt)^i y(t)$, i: 0,1,2,…,n. Az átviteli függvény az egyik legfontosabb és általánosan használt szabályozástechnikai fogalom, a tag differenciálegyenletének „egy más alakja". Az $n=m$ *idealizált elméleti* határeset, aminek jelentése elvileg lehetővé tenné, hogy ugrás alakú bemenőjel hatására a kimenőjelben is egy ugráskomponens jelenjen meg.

[13] $W(s)$ szinguláris helyei az s komplex változó azon $s=p_i$ értékei, ahol a $W(s)$ átviteli függvény $H(s)$ nevezője zérus értéket vesz fel ($H(p_i)=0\rightarrow W(p_i)=\infty$). Az átviteli függvényével leírt dinamikus rendszer sajátmozgása $exp(p_i t)$ típusú időfüggvény komponensekből tevődik össze, vagyis a $H(s)=0$ egyenlet p_i gyökeinek az időfüggvény alakulásában meghatározó jelentősége van.

[14] Súlyfüggvény: a tag $u(t)=\delta(t)$ *Dirac*-deltára adott válasza zérus kezdeti feltételek mellett. A $\delta(t)$ *Dirac*-delta elméleti jelentőséggel bíró vizsgálójel. Egységnyi jelterületű im-



4. ábra MIMO tag különféle hatásvázlatai

A MIMO tag állapotegyenletének megoldása. Az átviteli mátrix

A több ($j>1$ számú) bemenetű és több ($k>1$ számú) kimenetű, $n\geq 1$ rendű **MIMO**-rendszert absztraháló jelátvivő tag különféle hatásvázlatait a 4. ábrán szemléltetjük.
A matematikai modell:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$sx(s) - x(0) = Ax(s) + Bu(s)$$
$$y(s) = Cx(s) + Du(s).$$

Az A, B, C, D paramétermátrixaival definiált állapotegyenlet adott $u(t)$ gerjesztés és $x(0)=0$ kezdeti feltétel melletti megoldása az s operátortartományban:

$$x(s) = (sI - A)^{-1} Bu(s)$$
$$y(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D]\, u(s) = W(s)u(s)$$

$$x(t) = L^{-1}\{(sI - A)^{-1} Bu(s)\}$$
$$y(t) = L^{-1}\{[C\,(sI - A)^{-1} B + D]\;\; u(s)\} = L^{-1}\{W(s)u(s)\}$$

ahol ***W(s)*** most a tag ***átviteli mátrixa***[15]. Részletezve:

$$W(s) = \left[C(sI - A)^{-1} B + D\right] = \frac{Cadj(sI - A)B + \det(sI - A)D}{\det(sI - A)}.$$

Az átviteli mátrix definícióját az 5. ábra mutatja.
Az átviteli **mátrixnak** $k\times j$ számú átviteli függvény részeleme van. Ezek mindegyike az s változónak olyan algebrai törtje, amelyben a nevező minden részelem esetében ugyanaz a

A több ($j>1$ számú) bemenetű, több ($k>1$ számú) kimenetű, $n\geq 1$ rendű, lineáris MIMO-rendszer átviteli mátrixa az $y(s)=W(s)u(s)$ kifejezéssel definiálható. Általános esetben mindegyik kimenőjel – a $W_{kj}(s)$ átviteli függvényen keresztül – **mindegyik bemenőjeltől függ.**
Mátrix alakban felírva:

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \vdots \\ y_k(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \cdots & W_{1j}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \cdots & W_{2j}(s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ W_{k1}(s) & W_{k2}(s) & \cdots & W_{kj}(s) \end{bmatrix}}_{A\;\; W(s)=C(sI-A)^{-1}+D\;\; \text{átviteli mátrix}} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_j(s) \end{bmatrix}$$

$$y_i(s) = W_{i1}(s)u_1(s) + W_{i2}(s)u_2(s) + \ldots W_{ij}(s)u_j(s) \qquad i:1,2,\cdots k$$

Megjegyzés: **SISO** tag esetében $k=1$, $j=1$, ($n\geq 1$), ezért ekkor az átviteli mátrix az $y_1(s) = W_{11}(s)u_1(s) \rightarrow y(s)=W(s)u(s)$ kifejezésének megfelelően a $W(s)$ átviteli függvényre egyszerűsödik.

5. ábra Az átviteli mátrix definíciója

H(s)=det(sI–A) karakterisztikus polinom. Ennek n fokszáma azonos a rendszer állapotváltozóinak n számával, $p_i=\lambda_i$ gyökei pedig az $\boldsymbol{A}$ állapotmátrix sajátértékei.

Az állapotegyenlet megoldása az időtartományban most is a konvolúciótétel alapján számítható, de figyelembe kell venni, hogy a kifejezések mátrix műveleteket tartalmaznak $x(0)=0$ mellett:

$$x(t) = L^{-1}\{\, x(s)\, \} = L^{-1}\{(sI - A)^{-1} Bu(s)\} = L^{-1}\{\,\phi(s)Bu(s)\,\} =$$
$$= \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)\, d\tau$$
$$y(t) = L^{-1}\{\, y(s)\, \} = Cx(t) + Du(t)$$
$$\phi(s) = (sI - A)^{-1} \qquad \phi(t) = L^{-1}\{\phi(s)\} = e^{At},$$

ahol $\boldsymbol{\Phi(t)=e^{At}}$ a rendszer **alapmátrixa**, a $\boldsymbol{\Phi(s)}=L\{\Phi(t)\}=L\{e^{At}\}=\boldsymbol{(sI–A)^{-1}}=adj(sI–A)/det(sI–A)$ pedig ennek a *Laplace* transzformáltja.

A folytatásban a jelátvivő tagok alapstruktúráival, valamint a **SISO**-tag differenciálegyenletéhez rendelhető – lineáris alaptagokat tartalmazó – hatásvázlatokkal foglalkozunk.

(Folytatjuk!)

szbela@iit.bme.hu
juhaszne@iit.bme.hu

pulzus, amely a $t=0$ időpont kivételével minden időpontban zérus, és a $t=0$ időpontban ∞, de jelterülete egységnyi. *Laplace* transzformáltja: $L\{\delta(t)\}=\delta(s)=1$. Ennek megfelelően: $y(s)=w(s)=W(s)\delta(s)=W(s)$, és ezért $w(t)=\boldsymbol{L}^{-1}\{\boldsymbol{W(s)}\}$, illetve $\boldsymbol{W(s)}=\boldsymbol{L}\{w(t)\}$.

[15] Az egyenletrendezésnél figyelembe kell venni, hogy mátrixműveletekről van szó, és ezért: $(sI–\boldsymbol{A})^{-1}(sI–A)\, x(s)=(sI–A)^{-1}[x(0)+\boldsymbol{B}u(s)] \rightarrow x(s)=(sI–\boldsymbol{A})^{-1}[x(0)+\boldsymbol{B}u(s)]$.

Az inverzmátrix: $(sI–\boldsymbol{A})^{-1}=adj(sI–\boldsymbol{A})/det(sI–\boldsymbol{A})$. A **MIMO**-tagot leíró átviteli mátrix elemeiben szereplő átviteli függvények mindegyikének a nevezője ugyanaz a $H(s)=det(sI–A)$ $n\geq 1$ fokszámú polinom. Számlálójuk más-más polinom, amelynek azonban m fokszáma *legfeljebb azonos* a $H(s)$ n fokszámával (ha $\boldsymbol{D}\neq 0$), általában azonban $m<n$ (ha $D=0$). Ennek matematikai magyarázata az $adj(sI–A)$ mátrix legfeljebb $(n–1)\times(n–1)$ mérete.