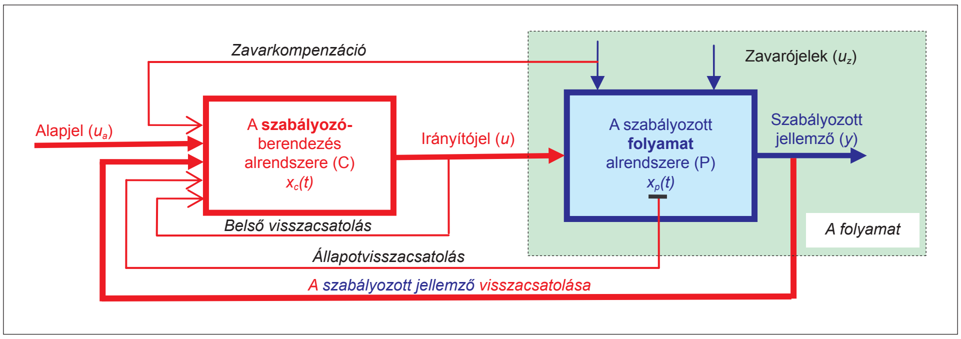
Szabályozástechnika – 7.

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencné

A szabályozástechnikai alapfogalmak ismertetése után a cikksorozat folytatásában a dinamikus rendszer matematikai modelljének és a folytonos idejű lineáris tagok rendszerjellemző függvényeinek az elemzésével foglalkozunk.

Bevezetés

A „Szabályozástechnika" című cikksorozat következő részeiben a dinamikus rendszerek (és ezen belül a negatívan visszacsatolt szabályozások) matematikai modelljeinek megalkotásával, ezek kezelésével, a frekvenciamódszer felhasználásával a stabilitásvizsgálatban és a méretezésben, az állapot-visszacsatolással történő irányítás elveivel, a hibrid szabályozás számítógépes szabályozási algoritmusainak kialakításával stb. foglalkozunk.



1. ábra A szabályozás alrendszerei

A témák feldolgozásához használnunk kell a matematikai analízis különböző fejezeteit (a függvényanalízist, a komplex függvénytant, a differenciál- és a differenciaegyenletek analitikus és numerikus megoldását, a *Laplace* (*L*)- és a diszkrét *Laplace* (*Z*)-transzformációs eljárásokat, a mátrixalgebrát stb.), és igénybe kell vennünk számítógépes eljárásokat is.

Az elméleti eredmények alkalmazásának bemutatását jelentős mértékben támogathatja az elvek és módszerek **példákkal** történő illusztrálása. Terjedelmi korlátok miatt azonban jelen cikksorozat keretei között sem az elméleti kérdések részletezésére, sem ennek illusztrálására nincs lehetőség. Ezért itt csupán a fogalmakat és a definíciókat ismertetjük, az ezekből származtatható következményeket és eredményeket a részletes matematikai indoklás mellőzésével közöljük. A példákkal történő illusztrációkkal is mértékletesen élhetünk. (Ez alól kivételt jelent „**Az elmélet egy alkalmazása**" című – későbbiekben sorra kerülő – fejezet, melyben egy elektromechanikus folyamat szabályozásának példájával részletesen tárgyaljuk és bemutatjuk a dinamikus rendszer „minden" lényeges tulajdonságát.)

A terjedelmi korlátok miatt a cikksorozatban nem szerepeltethető anyagrészek nem segítik az olvasót a megértés azonnali örömében. Ennek áthidalására az itt közölt tematikához kapcsolódóan egy elektronikusan letölthető anyagot is közreadunk. Ebben – a megértést támogató és az elmélyedést elősegítő igénnyel – részletes matematikai indoklásokkal, jelentős mértékű ábra- és példaanyag közlésével tárgyaljuk a cikksorozatban is közzétett ismereteket. A letölthető anyagok megtalálhatók a *www.ikma.bme.hu\ebook* cím alatt.

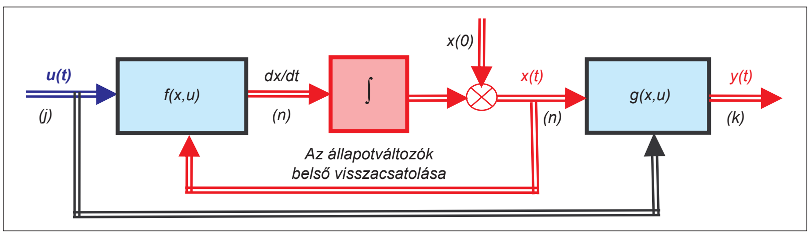
A szerzők szubjektív megítélése szerint a szabályozástechnika témáit – kellő részletességgel, igényes, de nem öncélú matematikai apparátussal, *számos gyakorlati példa részletes tárgyalásával* – feldolgozó legjobb művek egyikének szerzője *Benjamin C. Kuo*. Magyarul is megjelent kötete: **Önműködő szabályozási rendszerek** (Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1979), melyet az olvasó figyelmébe ajánljuk.

A dinamikus rendszer matematikai modellje

A szabályozási rendszer alrendszerei – mint ahogy azt már korábban is tárgyaltuk – a *szabályozott folyamat* (**P**rocess, **P**), és a *szabályozóberendezés* (**C**ontroller, **C**), amelyek egymással soros és visszacsatolt struktúrát alkotva erős *kölcsönhatásban* működnek együtt. Az alrendszerek egyedi jelátviteli tulajdonságait, az egymással kapcsolatos kölcsönhatásait jelátvivő tagokkal, absztrahált formában írjuk le. A rendszer hatásvázlatát az 1. ábra mutatja.

Ezen a vázlaton a beavatkozó szervet, a végrehajtó szervet és a teljesítményerősítőt a folyamat részének tekintjük. Az y szabályozott jellemző a *folyamat* (**P**) x_p állapotváltozóinak, az u irányítójelnek és az u_z zavarójeleknek az $y=g_p(x_p,u,u_z)$ függvényei. Az irányítójelet a szabályozási algoritmusnak megfelelően a szabályozóberendezés állítja elő. A szabályozóberendezést absztraháló tag (**C**) a rendszer hatásvázlat-struktúrájának x_c állapotváltozókkal rendelkező dinamikus alrendszere. A szabályozási algoritmus kialakításában az y szabályozott jellemzőről történő *fő visszacsatolás* mellett visszacsatolás létesíthető a folyamat x_p állapotváltozóiról (*állapot-visszacsatolás*) és az u irányítójelről (*belső visszacsatolás*), ezek célja a rendszer minőségjavítása. A visszacsatolásokon túlmenően az algoritmusképzésbe (az u irányítójel meghatározásának eljárásába) bevonható az u_z zavarójelek egy részhalmaza is (*zavarkompenzáció*). Mindezek következményeként az irányítójelet meghatározó implicit függvény: $u=g_c(u_a,y,x_c,x_p,u_z,u)$.

2. ábra Dinamikus rendszer állapotegyenletét szemléltető hatásvázlat



A hatásvázlat egyes tagjai (a **P** és **C** alrendszerek) bemenő- és kimenőjelekkel (független és függő változókkal) rendelkeznek. A jelek különféle fizikai mennyiségek értékei és értékváltozásai, és a t időváltozónak is a függvényei. A kimenő- és bemenőjelek közötti függvénykapcsolat rendszerint egy idő szerinti differenciálegyenlet és az ezt kísérő algebrai egyenlet formájában állítható elő. A differenciálegyenlet azt fejezi ki, hogy egy adott bemenőjelre és ennek változásaira az $x(t)$ állapotváltozó milyen módon (általában milyen *időkésleltetéssel*) reagál. *Ez az időkésleltetés az eredő rendszer dinamikájára is alapvető befolyást gyakorol, és rendszerint „**minden probléma forrása**”.*

A *folyamatok* egy részénél az u irányítójel megváltozására az x_p állapotváltozó és az y szabályozott jellemző csak egy T_h ún. *holtidő* eltelte után reagál. A késleltetésnek ez a típusa több időállandó egymásra torlódásából (látszólagos holtidő) vagy a jelterjedés véges sebességéből (valóságos holtidő) származtatható, és jelentős nehézségek okozójává válhat. A holtidős folyamat esetében az u irányítójel megváltozásának bekövetkezése után T_h ideig „*nem történik semmi*”, ezért ha az y szabályozott jellemző és a folyamat x_p állapotváltozói a $0<t<T_h$ időintervallumban nem változnak, akkor sem az állapot-visszacsatolás, sem a szabályozott jellemző visszacsatolásának a hatása nem tud ezen idő alatt érvényre jutni. A holtidős folyamatok kezelése mindezek miatt a szabályozás tervezőjétől fokozott figyelmet kíván.

A dinamikus rendszer állapotegyenlete

A j számú bemenettel, k számú kimenettel, n számú állapotváltozóval rendelkező **MIMO** (**M**ulti **I**nput, **M**ulti **O**utput, többbemenetű, többkimenetű, n-ed rendű) dinamikus rendszer matematikai modelljének egy lehetséges általános alakja (a rendszer nemlineáris **állapotegyenlete**):

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1\left[x_1(t),\cdots x_n(t),u_1(t),\cdots u_j(t)\right]\\
&\vdots\\
\frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n\left[x_1(t),\cdots x_n(t),u_1(t),\cdots u_j(t)\right]\\
y_1(t) &= g_1\left[x_1(t),\cdots x_n(t),u_1(t),\cdots u_j(t)\right]\\
&\vdots\\
y_k(t) &= g_k\left[x_1(t),\cdots x_n(t),u_1(t),\cdots u_j(t)\right]
\end{aligned}
$$

Ez az egyenletrendszer n számú, *elsőrendű közönséges differenciálegyenletet* és k számú, nemlineáris *algebrai egyenletet* tartalmaz. A megoldandó feladat rendszerint az, hogy adott $u(t)$ gerjesztés és az állapotváltozók $x(0)$ kezdeti feltételei mellett – ismert f és g függvények esetében – meg kell határozni az $y(t)$ kimenőjelet (az *$u(t)$ gerjesztésre adott $y(t)$* ***választ***). E kérdéskörben elsődleges szerepe a differenciálegyenlet-rendszer $x(t)$ megoldásának van, mert $x(t)$ és $u(t)$ ismeretében $y(t)$ kiszámítása már csupán egy algebrai művelet. Bevezetve a mátrixalgebrában használt

$$
x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix}\quad
\frac{dx(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix}\quad
u(t)=\begin{bmatrix}u_1(t)\\ \vdots\\ u_j(t)\end{bmatrix}\quad
y(t)=\begin{bmatrix}y_1(t)\\ \vdots\\ y_k(t)\end{bmatrix}\quad
f=\begin{bmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_n\end{bmatrix}\quad
g=\begin{bmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_k\end{bmatrix}
$$

oszlopvektor-jelöléseket, az n számú elsőrendű, közönséges differenciálegyenletből és k számú algebrai egyenletből álló egyenletrendszer vektor-differenciálegyenlet formájában is felírható. Ennek alakja:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= f[x(t),u(t)]\\
y(t) &= g[x(t),u(t)]
\end{aligned}
$$

ahol $x(t)$: az **állapotváltozó** vektor ($n\times1$), $dx(t)/dt$: az **állapotsebesség** vektor ($n\times1$), $u(t)$: a **bemenőjel** (*gerjesztés*) vektor ($j\times1$), $y(t)$: a **kimenőjel** (*válasz*) vektor ($k\times1$). Az állapotegyenletet – a mérnöki szemléletmódhoz a képletekhez képest közelebb álló, de azzal egyenértékű – hatásvázlattal is szemlélhetjük (lásd 2. ábra).

A hatásvázlaton az $f(x,u)$ és $g(x,u)$ függvényeket absztraháló tagok ***algebrai*** függvénykapcsolatot fejeznek ki a közvetlen bemenő- és kimenőjeleik között, aminek jelentése az, hogy bemenőjeleik megváltozására a közvetlen kimenőjeleik megváltozásával, *késleltetés nélkül* (azonnal) reagálnak. Az **integráló tag** a hatásvázlat ***dinamikus*** tagja, $x(t)$ kimenőjele a $dx(t)/dt$ bemenőjelének az idő szerinti integrálja. Ebből következik, hogy az integráló tag – véges értékű bemenőjel-változás hatására keletkező – kimenőjelének megváltozásához időre van szükség. A hatásvázlat szemléletesen jeleníti meg a dinamikus rendszer jelei közötti oksági viszonyokat és állapotváltozóinak ***belső visszacsatolását*** is[1].

Ennek az általános rendszermodellnek egy speciális esete, amikor az $f(x,u)=\boldsymbol{A}x(t)+\boldsymbol{B}u(t)$; $g(x,u)=\boldsymbol{C}x(t)+\boldsymbol{D}u(t)$ lineáris függvények. Ez a lehetséges rendszermodell egy osztálya (**LTI** – ***L**inear **T**ime-**I**nvariant*, lineáris időinvariáns, kauzális[2] rendszer). Koordinátákban felírható matematikai kifejezése a

$$
\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix}}_{\frac{d}{dt}x(t)}
=\underbrace{\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&\cdots&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\cdots&\cdots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix}}_{x(t)}
+\underbrace{\begin{bmatrix}b_{11}&\cdots&\cdots&b_{1j}\\ b_{21}&\cdots&\cdots&b_{2j}\\ \vdots&\cdots&\cdots&\vdots\\ b_{n1}&\cdots&\cdots&a_{nj}\end{bmatrix}}_{B}
\underbrace{\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\\ \vdots\\ u_j(t)\end{bmatrix}}_{u(t)}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ \vdots\\ y_k(t)\end{bmatrix}}_{y(t)}
=\underbrace{\begin{bmatrix}c_{11}&\cdots&\cdots&c_{1n}\\ c_{21}&\cdots&\cdots&c_{2n}\\ \vdots&\cdots&\cdots&\vdots\\ c_{k1}&\cdots&\cdots&c_{kn}\end{bmatrix}}_{C}
\underbrace{\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix}}_{x(t)}
+\underbrace{\begin{bmatrix}d_{11}&\cdots&\cdots&d_{1j}\\ d_{21}&\cdots&\cdots&d_{2j}\\ \vdots&\cdots&\cdots&\vdots\\ d_{k1}&\cdots&\cdots&d_{kj}\end{bmatrix}}_{D}
\underbrace{\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\\ \vdots\\ u_j(t)\end{bmatrix}}_{u(t)}
$$

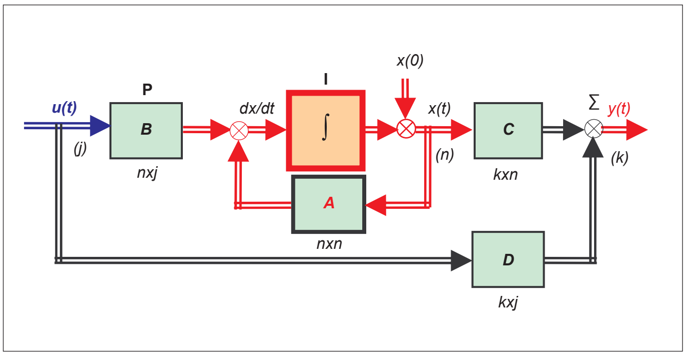
egyenletrendszer,[3] a dinamikus tag lineáris **állapotegyenlete**. Általános esetben minden egyes $dx_i(t)/dt$ állapotsebesség

---

1 A tagokat összekötő és a jeleket szimbolizáló, nyíllal ellátott kettős vonalak a hatásirányt (az ok-okozat relációt) jelölik, ill. azt érzékeltetik, hogy minden tagnak több bemenő- és több kimenőjele is lehet.

2 *Linearitás*: a $dx(t)/dt$ állapotsebesség, valamint az $y(t)$ kimenőjel, az $x(t)$ állapotváltozó és az $u(t)$ bemenőjel A, B, C, D paramétermátrixokkal súlyozott lineáris kombinációja. *Időinvariancia:* a gerjesztés $u(t-T)$ időbeli $T>0$ eltolása csak egy ugyanekkora eltolást okoz az $y(t-T)$ válaszban. *Kauzalitás*: bármely belépő gerjesztéshez ($u(t)=0$, ha $t<0$) belépő válasz ($y(t)=0$, ha $t<0$) tartozik.

3 Ez az állapotegyenlet a lineáris **MIMO**-tagot leíró matematikai rendszermodell, n darab elsőrendű, állandó együtthatójú, lineáris differenciálegyenletet és k darab lineáris algebrai egyenletet tartalmaz. Általában a $dx(t)/dt=f\,[x(t),u(t)]$, $y(t)=g\,[x(t),u(t)]$ egyenletekkel jellemezhetően nemlineáris kapcsolat van a $dx(t)/dt$ állapotsebesség, az $x(t)$ állapotváltozó, az $u(t)$ gerjesztés, ill. az $y(t)$ válasz, az $x(t)$ állapotváltozó és az $u(t)$ gerjesztés között. A linearizálás módszerével ezt – a linearizálásra alkalmas f és g nemlineáris függvények mellett, a rendszer egy munkapontjának kis környezetében – egy lineáris modellel közelíthetjük. Egyes folyamatok állapotegyenlete eleve lineáris (pl. R, L, C elemeket tartalmazó villamos áramkörök, ill. tömeget, rugót, csillapítást tartalmazó mechanikai szerkezetek stb.).



3. ábra Az állapotegyenlethez rendelhető hatásvázlat

(i: 1,2, …, n) és minden egyes $y_i(t)$ kimenőjel (i: 1,2, …, k) az n számú állapotváltozó és a j számú bemenőjel mindegyikének a függvénye, ezek súlyozott, lineáris kombinációja. Felhasználva a mátrixalgebrában használt fogalmakat és jelöléseket, a koordinátákban adott függvénykapcsolatoknak egy tömörített alakja a

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

állapotegyenlet. Ebben $\boldsymbol{A}$: ($n\times n$) méretű, *négyzetes* **állapotmátrix**, $\boldsymbol{B}$: ($n\times j$) méretű, **bemeneti mátrix**, $\boldsymbol{C}$: ($k\times n$) méretű, **kimeneti mátrix**, $\boldsymbol{D}$: ($k\times j$) méretű, **direkt mátrix** (***A, B, C, D***: a paramétermátrixok).

A *lineáris* rendszerre érvényes a **szuperpozíció** elve[4]. A lineáris szabályozási rendszerek tárgyalása során lineáris állapotegyenlettel jellemzzük a szabályozott folyamatot, a szabályozóberendezést és a teljes, visszacsatolásokat tartalmazó eredő rendszert is.[5] A szuperpozíció elvének alapján az alapjelre és a zavarójelekre külön-külön vizsgálhatjuk a rendszer dinamikus tulajdonságait, és ha ezek a gerjesztések egyidejűleg lépnek fel a rendszer bemenetein, akkor a részválaszok összegeként kaphatjuk meg a rendszer eredő válaszát.

A lineáris rendszer állapotegyenletéhez is hozzárendelhető egy hatásvázlat (lásd 3. ábra), amelynek alkotóelemei az *arányos* (**P**, proporcionális), az *összegző* (**Σ**) és az *integráló* (**I**) tulajdonságokkal rendelkező lineáris *alaptagok*.[6] Ez a hatásvázlat is az állapotegyenlettel egyenértékűen szemlélteti a dinamikus rendszer jelátviteli tulajdonságait, a jelek közötti oksági viszonyokat és a jelterjedés hatásmechanizmusát. Dinamikus eleme az integráló alaptag.

Az állapotegyenlethez rendelhető hatásvázlatból is kiolvasható, hogy az *y(t)* kimenőjelnek egyik összetevője az *x(t)* állapotváltozó által meghatározott ***Cx(t)*** komponens, a másik összetevője pedig az *u(t)* bemenőjeltől *direkt* módon függő ***D**u(t)* komponens[7]. Az *x(t)* állapotváltozót az *u(t)* gerjesztés és az *x*(0) kezdeti feltétel befolyásolja, de ez a befolyás *az **A** állapotmátrixszal visszacsatolt integráló tagon* keresztül juthat érvényre, ezért az *x(t)* állapotváltozóban az *u(t)* hatása késleltetéssel jelenhet meg. Miután az integráló tag az ***A*** állapotmátrixon keresztül *visszacsatolt*, ez az *A* állapotmátrixnak megkülönböztetett jelentőséget ad.

Az állapotegyenlettel leírt lineáris rendszermodellben az *u, x, y* jelek mindegyike és a *t* időváltozó is dimenziós fizikai mennyiség, és ebből adódóan az *A, B, C, D paramétermátrixok* elemei is különféle dimenzióval rendelkező fizikai paraméterek[8]. Az állapotegyenletben – a fizikai változókra és az időre – $\mathbf{U^0}$, $\mathbf{X^0}$, $\mathbf{Y^0}$, $\mathbf{T^0}$ állandó értékű viszonyítási alapokat kijelölve – bevezethetők a jelek és az idő $u/\mathbf{U^0}=u^*$, $x/\mathbf{X^0}=x^*$, $y/\mathbf{Y^0}=y^*$, $t/\mathbf{T^0}=t^*$ dimenzió nélküli, relatív mennyiségei, amelyek segítségével az állapotegyenlet relatív változóiban felírt alakja dimenziófüggetlenné tehető (amplitúdó- és időléptékezés). A rendszerelméleti analízis során általában az állapotegyenletnek ezzel a normalizált, dimenziófüggetlen alakjával dolgozunk.

A matematikai modell alapján a rendszeranalízis alapkérdése: adott *u(t)* belépő gerjesztés, az állapotváltozók *x(0)* kezdeti értéke, valamint az ***A, B, C, D*** paramétermátrixok ismerete mellett hogyan határozhatóak meg az *x(t)* állapotváltozó és az *y(t)* kimenőjel (a válasz) $t>0$ időben keletkező időfüggvényei? Lényegében tehát az állapotegyenlet megoldásáról van szó. A megoldás megkeresésének – **LTI-**rendszert feltételezve – hatékony módszere a *Laplace* (*L*)-integrál-transzformáció alkalmazása. Ennek felhasználásával a *t* időtartományban értelmezett lineáris *differenciálegyenletek* helyett az *s Laplace*-operátortartományában *algebrai egyenletekkel* dolgozhatunk, de ennek az „ára”, hogy az algebrai egyenletek megoldásaként kapott *x(s), y(s)* válaszokat is az *s* operátortartományban kapjuk. Ilyenkor egy **inverz** *Laplace* (L^{-1})-transzformációval térhetünk vissza az időtartományba[9]. Mindezek az absztrakció további elmélyítésével járnak.

Jelen anyagrészben olyan fogalmak ismertetésére kerül sor, amelyek a szabályozási rendszerek analíziséhez alapvetően szükségesek. Ilyen fogalmak és témakörök a jelátvivő tagok rendszerjellemző függvényei, a **f**olytonos **i**dejű (**FI**) és a **d**iszkrét **i**dejű (**DI**) dinamikus rendszerek differenciál- és differenciaegyenletei, állapotegyenletei. Ezek kezelése *Laplace*-, ill. *Z*-transzformációs módszerekkel, a komplex függvénytan, a mátrixalgebra egyes fejezeteinek a felhasználásával stb. történhet. Először a folytonos idejű rendszerek elméleti összefoglalásával foglalkozunk, a diszkrét idejű rendszerek elméleti összefoglalását a számítógépes szabályozás ismertetésekor tárgyaljuk.

Folytonos idejű lineáris tagok rendszerjellemző függvényei

A szabályozási rendszer hatásvázlatán szereplő bármely *u* bemenő- és *y* kimenőjellel rendelkező – dinamikus rendszert absztraháló – jelátvivő tagnak az általános rendszerjellemző függvénye (amelyből a többi rendszerjellemző függvény is származtatható) a tag **differenciálegyenlete**. Lineáris, egybemenetű, egykimenetű (**SISO** → **S**ingle **I**nput **S**ingle **O**utput) tag esetében

---

4 Ha az **LTI-**rendszer az $u_I(t)$ gerjesztésre $y_I(t)$ választ és az $u_{II}(t)$ gerjesztésre $y_{II}(t)$ választ ad, akkor az $u(t)=c_1u_I(t)+c_2u_{II}(t)$ gerjesztésre adott válasz $y(t)= c_1y_I(t)+c_2y_{II}(t)$, ($c_1$, c_2 állandók).

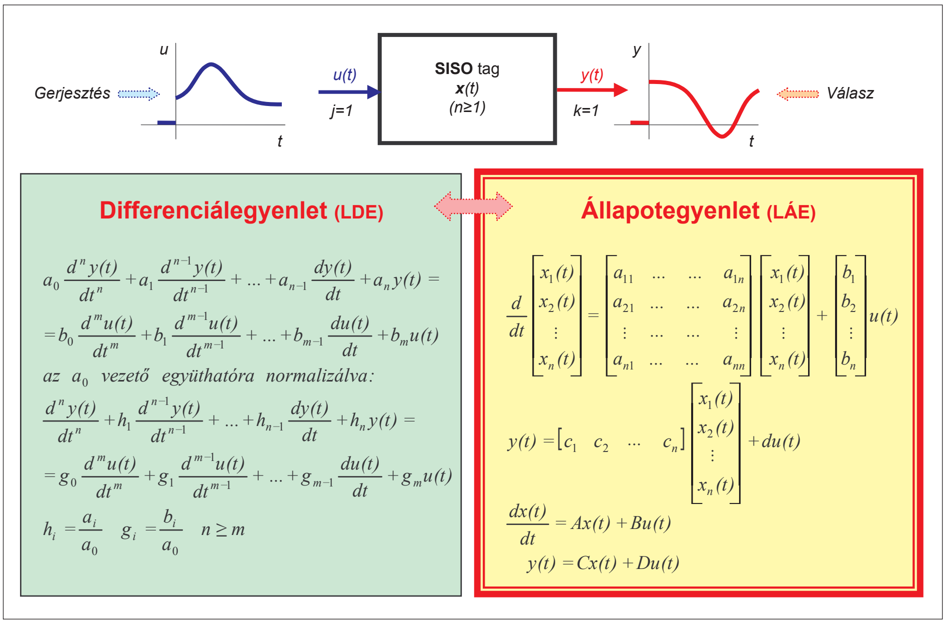
5 A szabályozások vizsgálata során használt matematikai modellek különféle típusai közül jelen munkában a **statikus**, a **dinamikus**, a **lineáris**, a **determinisztikus**, a **koncentrált paraméterű**, a **folytonos idejű** és a **diszkrét idejű** modelleket használjuk. A sztochasztikus modellekben valószínűségi változókkal jellemzett jelekkel, az elosztott paraméterű rendszerekben parciális differenciálegyenletekkel lehet leírni a dinamikus rendszer viselkedését, ezek azonban nem képezik jelen munka tárgyát. A **nemlineáris** rendszerekkel is csupán érintőlegesen foglalkozunk.

6 Az **arányos tag** *o* (output) kimenőjele az *i* (input) bemenőjelével arányos: $o(t)=ki(t)$ és *k* az átviteli tényező. Az **összegző tag** kimenőjele a bemenőjeleinek az összege: $o(t)=\Sigma i_i(t)$. Az **integráló alaptag** kimenőjele bemenőjelének idő szerinti integrálja: $o(t)=o(0)+\int i(t)dt$, *ahol o*(0) a kimenőjel kezdeti értéke. Az arányos és az összegző tagok *algebrai tagok*, az integráló tag *dinamikus tag*.

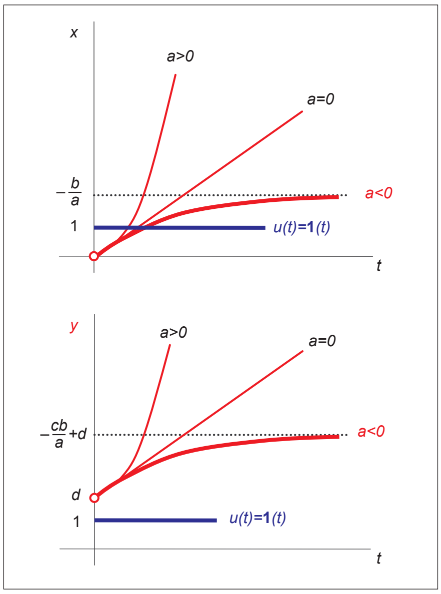
7 Ha az állapotegyenlet a szabályozott folyamatot írja le, akkor az *y(t)* kimenőjelnek (a szabályozott jellemzőnek) a ***D**u(t)* komponense általában zérus, vagyis az *u(t)* gerjesztés (az irányítójel) kizárólag az *x(t)* állapotváltozókon keresztül befolyásolja az *y(t)* kimenőjelet. Ilyenkor az állapotegyenletben $\boldsymbol{D}=0$.

8 A normalizálatlan rendszer ***A*** állapotmátrixának főátlójában szereplő a_{ii} paraméterek mindegyike [sec^{-1}] dimenzióval rendelkező számérték.
Ennek indoklása: $dx_i/dt=\ldots+a_{ii}x_i+\ldots \rightarrow \dim[dx_i/dt]=\dim[a_{ii}x_i] \rightarrow \dim[a_{ii}]=\mathrm{sec}^{-1}$.

9 A *nemlineáris* állapotegyenlet megoldására a *Laplace*-transzformáció **nem** használható, és általában analitikus megoldás sem létezik. A nemlineáris állapotegyenlet megoldására numerikus módszerek jöhetnek szóba (*Euler*-, *Adams*-, *Runge–Kutta*-eljárások stb.).



4. ábra SISO-tag matematikai modelljei



6. ábra Elsőrendű rendszer ugrásválaszai x(0)=0 mellett

ez vagy egy *n rendű*, állandó együtthatójú, **l**ineáris **d**ifferenciál**e**gyenlet (**LDE**), vagy *n* számú, *elsőrendű*, állandó együtthatójú, lineáris differenciálegyenletet tartalmazó differenciálegyenlet-rendszer[10] (**l**ineáris **á**llapot**e**gyenlet: **LÁE**, lásd 4. ábra).

Az állapotegyenlet $x(0)$ kezdeti feltételre és $u(t)$ gerjesztésre vonatkozó analitikus megoldása[11]:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = C[\phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau] + Du(t)$$

$$ahol \quad \phi(t) = e^{At} \quad az \quad alapmátrix$$

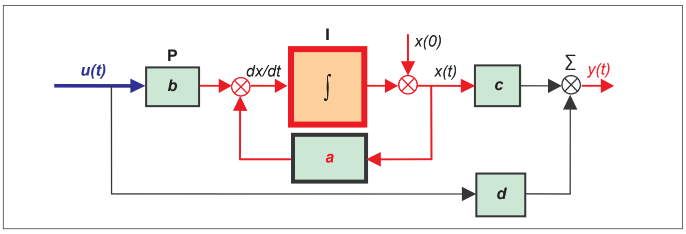
Megjegyzés:

A megoldóképletből látható, hogy az $x(t)$ megoldásnak két összetevője van. Ezek az $x(0) \neq 0$ kezdeti feltétel által generált $x_s(t)$ mozgáskomponens (a rendszer **sajátmozgása**), valamint az $u(t) \neq 0$ gerjesztés által generált $x_g(t)$ mozgáskomponens (a rendszer **gerjesztett mozgása**). Az eredő mozgás – a szuperpozíció tételének alapján is – a két mozgás összegeként adódik:

$$x(t) = x_s(t) + x_g(t)$$

$$x_s(t) = e^{At}x(0) = \phi(t)x(0) \qquad x_g(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau = \int_0^t \phi(t-\tau)\,Bu(\tau)\,d\tau$$

5. ábra Elsőrendű (n=1) SISO-rendszer (j=k=1) hatásvázlata



Abban a speciális esetben, ha a **SISO**-tag elsőrendű (n=1), a paramétermátrixok skaláris értékek: $A=a$, $B=b$, $C=c$, $D=d$, és a dinamikus rendszer igen egyszerűvé válik (lásd 5. ábra). Az elsőrendű rendszer állapotegyenletének megoldóképlete is jelentősen egyszerűsödik, mivel az e^{At} mátrix exponenciális függvény (az alapmátrix) egy közönséges, e^{at} exponenciális típusú skaláris kifejezés.

Ekkor:

$$x(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)bu(\tau)\,d\tau = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = cx(t) + du(t) \qquad és \quad \phi(t) = e^{at}$$

Ha például $u(t)=\mathbf{1}(t)$ ugrásjel, és a kezdeti feltétel $x(0)=0$, akkor az elsőrendű rendszer $x(t)$, $y(t)$ válaszai:

$$x(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)}bd\tau = e^{at}\int_0^t e^{-a\tau}d\tau b = \begin{cases} bt \\ e^{at}\left[\frac{1}{-a}e^{-a\tau}\right]_0^t b \end{cases} = \begin{cases} bt & a=0 \\ -\frac{b}{a}(1-e^{at}) & a \neq 0 \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} cbt + d & a = 0 \\ -\frac{cb}{a}(1-e^{at}) + d & a \neq 0. \end{cases}$$

Az elsőrendű rendszer esetében – az $x(t)$ állapotváltozónak és az $y(t)$ kimenőjelnek – az egységugrás válasza $t \to \infty$ mellett kizárólag akkor lehet $x(\infty) = -b/a$=*állandó*, $y(\infty) = -cb/a+d$=*állandó*, ha $\boldsymbol{a<0}$, vagyis ha az 5. ábra elsőrendű rendszerének *integráló tagja **negatívan** van visszacsatolva*. Az $x(t)$, $y(t)$ megoldások grafikonjait a 6. ábra tartalmazza[12]. **Az elsőrendű rendszer jelentősége abban van, hogy egyrészt *tranziensei igen egyszerűen számíthatók*, másrészt az n>1 rendszámú rendszer is igen gyakran[13]** – alkalmasan megválasztott koordináta-transzformációval – **ilyen *elsőrendű rendszerekre particionálható*** (lásd az átviteli függvény párhuzamos felbontását).

Az állapotegyenlet megoldásaként kapott $x(t)$ és $y(t)$ eredményekből figyeljük meg, hogy az *ugrásszerűen* változó $u(t)$ bemenőjel mellett az $x(t)$ állapotváltozó értéke a t=0 időpillanatban nem „ugrik”, vagyis az $x(t)$ integráló tag kimenőjele a t=0 időpillanatban $x(0)$=0. Az $y(t)=cx(t)+du(t)$ kimenőjel a t=0 időpillanatban kizárólag $d \neq 0$ esetében tud $y(0)=cx(0)+du(0)=d$ értékre változni ($u(0)$=**1**!).

(Folytatjuk!)

szbela@iit.bme.hu, juhaszne@iit.bme.hu

[10] A **SISO**-tag *n* rendű lineáris differenciálegyenletével leírt **LDE**-modellje átalakítható az *n* számú, elsőrendű differenciálegyenletet tartalmazó **LÁE**-állapotegyenletre (lásd az átviteli függvény felbontása témákat). Ekkor ***B*** oszlopvektor, ***C*** sorvektor, ***D*** skalár.

[11] A lineáris állapotegyenlet (**LÁE**) megoldóképletének meghatározása a „Lineáris differenciálegyenlet megoldása *Laplace*-transzformációval” című részben található. Az *n* rendű lineáris differenciálegyenletnek (**LDE**) is van analitikus megoldóképlete, ennek részletezésére azonban nem térünk ki. A differenciálegyenlet megoldására *n*>1 rendszám esetében számítógépes szolgáltatásokat célszerű igénybe venni.

[12] A 6. ábrán közölt időfüggvények – a matematikai meghatározást mintegy helyettesítve – a hatásvázlat alapján, egyszerű „spekulatív úton” is kikövetkeztethetőek. Különösen így van ez $\boldsymbol{a}$=0 esetében, mikor is az integráló tag nincs visszacsatolva.

[13] Az *n* rendű rendszer akkor „rakható össze” az 5. ábrán vázolt elsőrendű rendszerekből, ha *A* állapotmátrixának minden λ_i sajátértéke egymástól különböző (lásd az átviteli függvény *párhuzamos* felbontását).