

Szabályozástechnika 39.

Állapotirányítás, állapotirányítás megfigyelővel, optimális (LQR) irányítás – 9.

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencné

Az állapotirányítás témakörének tárgyalását folytatva egy szerkezeti-áramköri példán (szervorendszer állapotirányítása) is bemutatjuk a folyamat pólusainak az állapotvisszacsatolás alkalmazásával történő áthelyezését, valamint ennek eredményeként kapható gyorsabb működést. Megmutatjuk, hogy az állapotvisszacsatolás hatásláncának egy sorosan beiktatott integráló taggal történő kiegészítésével a rendszer integrálszabályozásának struktúrája is kialakítható.

Szerkezeti – áramköri példa

Az 1. ábra egy szervorendszer állapotvisszacsatolásának szerkezeti vázlatát és hatásvázlatát tartalmazza. A folyamat hatásvázlatán feltüntetett paraméterek: k_p átviteli tényező, T_m elektromechanikai időállandó, T_v villamos időállandó. Ezek ismeretében a folyamat (a teljesítményerősítő és a külső gerjesztésű, egyenáramú villamos motor) állapotegyenlete, A, B, C, D paramétermátrixai, $W_p(s)$ átviteli függvénye és ennek p_1, p_2 pólusai:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{T_v} & -\frac{1}{T_v} \\ \frac{1}{T_m} & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_p \\ 0 \end{bmatrix}}_B u(t) \\ y(t) &= \underbrace{[0 \quad 1]}_C \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{0}_D u(t) \\ W_p(s) &= C(sI - A)^{-1}B = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T_v} & \frac{1}{T_v} \\ -\frac{1}{T_m} & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_p \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s & -\frac{1}{T_v} \\ \frac{1}{T_m} & s + \frac{1}{T_v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_p \\ 0 \end{bmatrix} \frac{T_m T_v}{s^2 T_m T_v + s T_m + 1} = \frac{G_p(s)}{H_p(s)} = \frac{k_p}{1 + s T_m + s^2 T_m T_v} = \frac{y(s)}{u(s)} \\ p_{1,2} &= \frac{-T_m \pm \sqrt{T_m^2 - 4T_m T_v}}{2T_m T_v} = \\ &= -\frac{1}{2T_v} \pm \sqrt{\frac{1}{4T_v^2} - \frac{1}{T_m T_v}} = \frac{1}{T_v} \left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{T_v}{T_m}} \right). \end{aligned}$$

Ha az állapotvisszacsatolt folyamat p_{R1}, p_{R2} pólusai előírt méretezési követelmények, akkor ezek célszerű megválasztásával, valamint az $x_1(t)=i(t)$ armatúráramról és az $x_2(t)=\Omega(t)$ szögsebességről az f_p, f_Ω átviteli tényezőknél keresztül létesített állapotvisszacsatolással a rendszer felgyorsítható. Az $F=[f_i, f_\Omega]$ sorvektor (a folyamat A, B

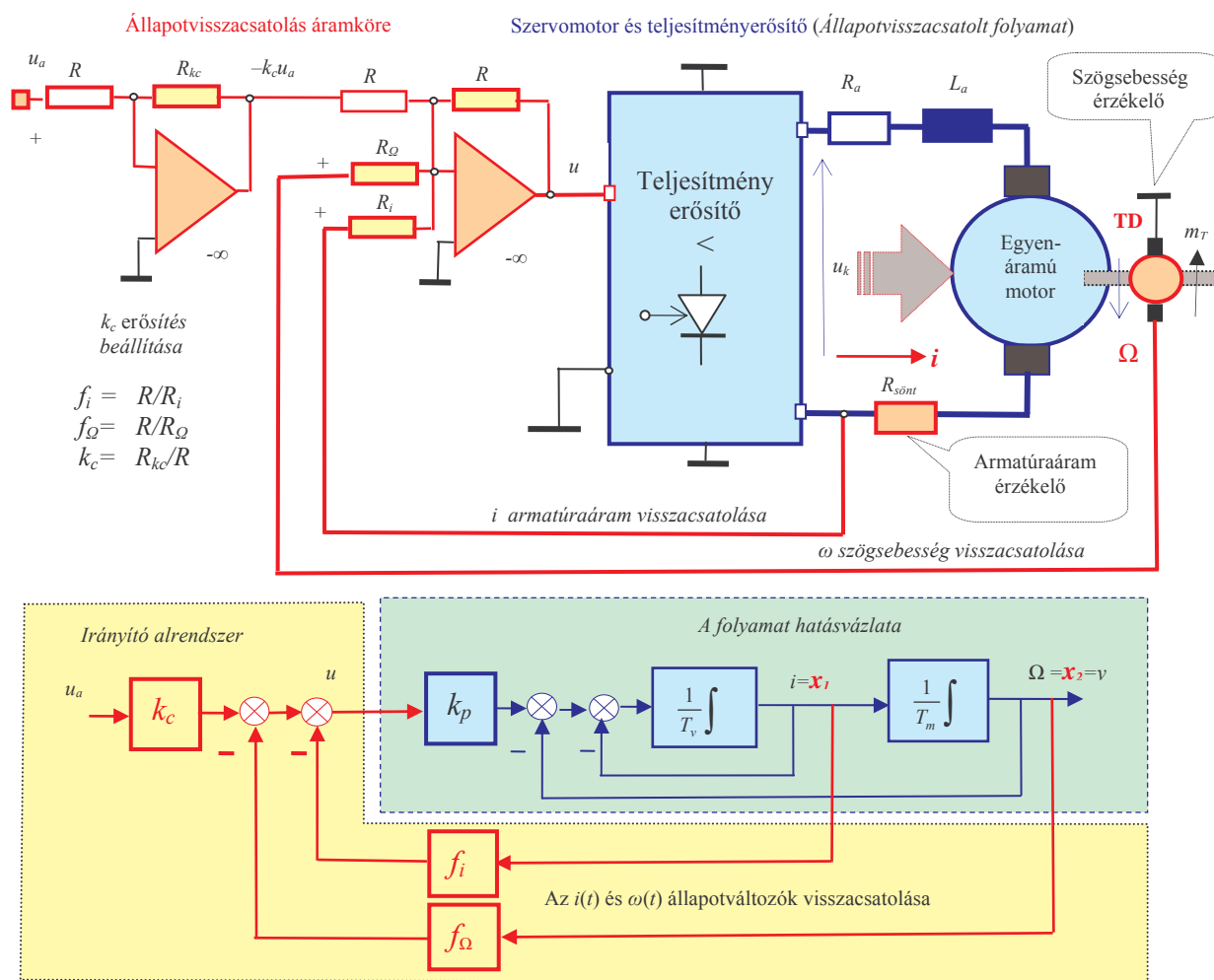
paramétermátrixainak és p_{R1}, p_{R2} ismeretében) az Ackermann-képlettel számítható: $F = \text{acker}(A, B, p_R)$.

Integrátor beiktatása az állapotvisszacsatolással kialakított szabályozási hatásláncba

A 2a. ábra az állapotvisszacsatolás klasszikus struktúrája, amikor is az F sorvektor megfelelő megválasztásával a folyamat p_i pólusait mintegy a visszacsatolt rendszer p_{Ri} pólusaira „cserélhetjük”. Ebben a struktúrában a k_c átviteli tényezőt megválaszthatjuk olyan módon, hogy a rendszer eredő $k_R = y_0/u_{a0}$ átviteli tényezője egység legyen. Ekkor az egységugrásra adott $y(t)$ válasz állandósult állapotban $y(\infty)=y_0=v_R(\infty)=u_a(\infty)=1$. Miután a folyamat általában önbeálló tulajdonságú, ezért a hatáslánc $i=0$ típuszámú, emiatt a követési és értéktartási tulajdonságok sem kedvezőek. A k_R átviteli tényező kifejezésében a folyamat DC-erősítése is résztvevőként szerepel, ezért ennek munkapontfüggése miatt a $k_R=1$ sem garantálható.

A folyamat állapotvisszacsatolását a 2b. ábra szerinti struktúrában egy integrátorral kiegészítve is kialakíthatjuk. Ennek hátránya ugyan a rendszám növekedése, de alapvető előnye – a típuszám $i>0$ miatt bekövetkező – értéktartási és követési tulajdonságok jelentős javulása. Egyszerűen belátható, hogy pl. a 3b. ábrának megfelelően kialakított, aszimptotikusan stabilis rendszer $u_a(t)=1(t)$ alapjelre keletkező $y(t)=v_R(t)$ válaszában $y(\infty)=u_a(\infty)=1$, vagyis az állandósult hiba zérus (állandósult állapot ugyanis csak akkor lehet, ha a sorosan beiktatott integráló tag x_i kimenőjele is állandó, ami a $dx_i/dt=u_a - y$ bemenőjelének zérus értékénél állhat csak elő). A rendszer ezt a tulajdonságát akkor is megtartja, ha a folyamat paramétereiben változás következik be, de a rendszer aszimptotikus stabilitása megmarad. Az integráló taggal kiegészített irányító alrendszer ekkor algebrai jellegét elveszítve dinamikus tulajdonságokkal rendelkezik.

A 2b. ábra struktúrájában szereplő és a hatásláncba sorosan beiktatott integrátor kimenőjele a pótlólagosan megjelenő $x_i(t)$ állapotváltozó, ami miatt az eredő rendszer rendszáma a folyamat



1. ábra. Egyenáramú villamosgép állapotviszacsatolásának szerkezeti illusztrációja

n rendszámához képest $n_R = n + 1$ értékre nő. A k_{cf} átviteli tényező most nem a rendszer DC-erősítését van hivatva beállítani, hanem – mivel az y a kimenőjelről történő visszacsatolás szerves része – az eredő rendszer $n + 1$ számú előírt p_{Ri} pólusainak kialakításában van az F visszacsatoláshoz hasonló feladata. Az F és k_{cf} meghatározására most is az Ackermann-formulát lehet alkalmazni, ehhez azonban a rendszer állapotegyenleteit a megfelelő formára kell hozni¹. A 3. ábrán az integrátorral kiegészített struktúra hatásvázlatának egy olyan alakját adjuk meg, amelyben a folyamat – állapotegyenletével leírt – dinamikáját is részletezzük.

A hatásvázlat alapján az eredő rendszer matematikai modelljének felírásakor figyelembe kell venni a hatásláncban megjelenő, sorosan beiktatott integráló tagot, amelynek kimenőjele a $x_1(t)$ állapotváltozó. A 3. ábrán látható hatásvázlat figyelembevételével és jelöléseivel:

Legyen $x_R(t) = [x(t) \ x_1(t)]^T$ az integrátorral kiegészített rendszer eredő $n + 1$ méretű állapotvektora. Ezzel:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dx_1(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BF & Bk_{cf} \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_a(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix} = C_R x_R(t)$$

$$\frac{dx_R(t)}{dt} = A_R x_R(t) + B_R u_a(t)$$

$$y(t) = C_R x_R(t)$$

$$A_R = \begin{bmatrix} A - BF & Bk_{cf} \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad B_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_R = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$$

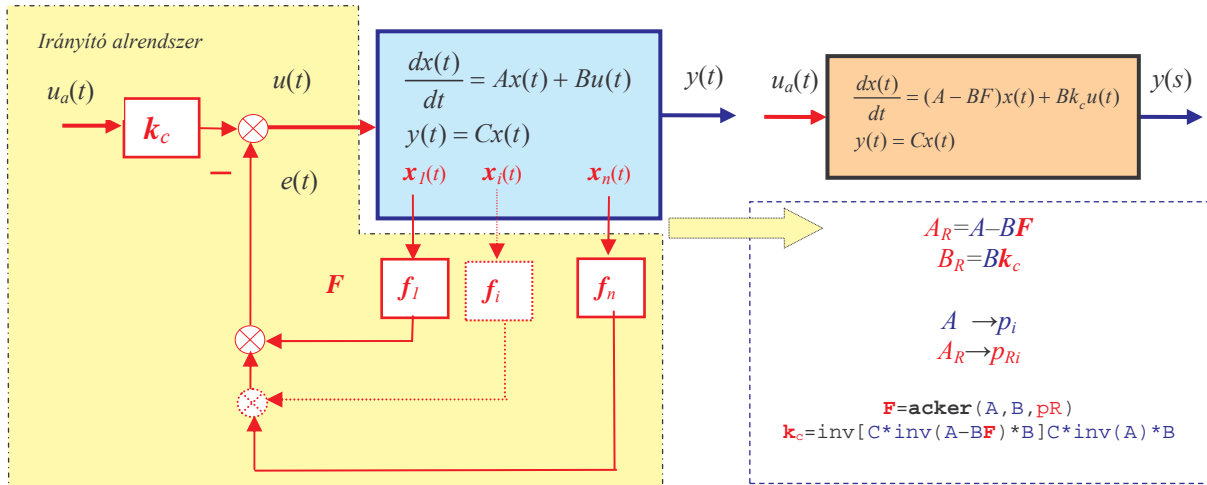
Az eredő rendszer A_R állapotmátrixa és ennek karakterisztikus egyenlete:

$$A_R = \begin{bmatrix} A - BF & Bk_{cf} \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} BF & -Bk_{cf} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & -k_{cf} \end{bmatrix} = A_a - B_a F_a$$

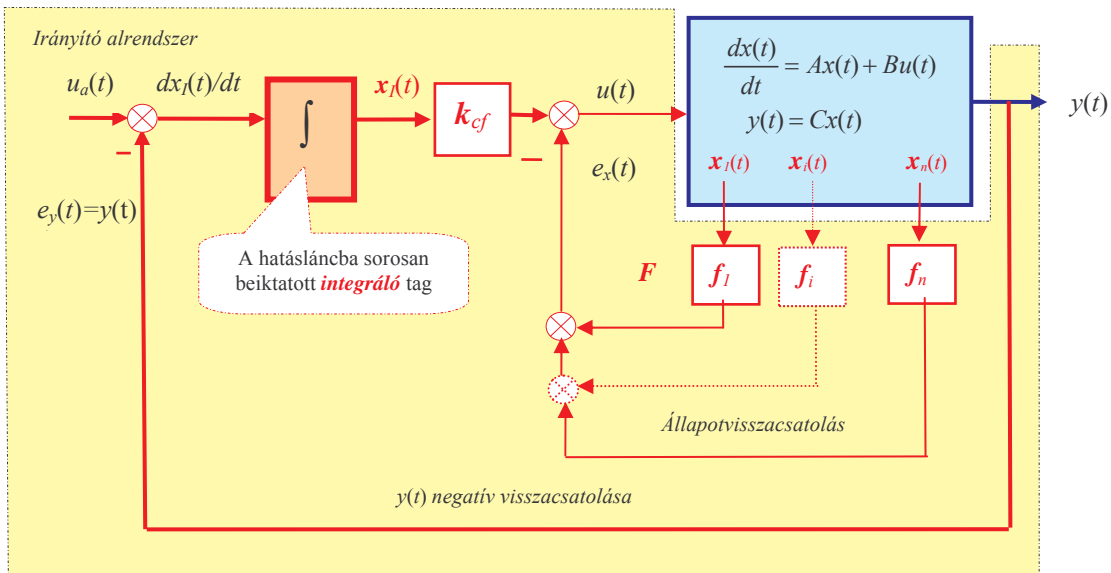
$$\det(\lambda I - A_R) = \det[\lambda I - (A_a - B_a F_a)] = 0.$$

¹ Irodalom: Bars Ruth – Hetthessy Jenő – Barta András: Szabályozástechnika példatár. Műegyetemi Kiadó.

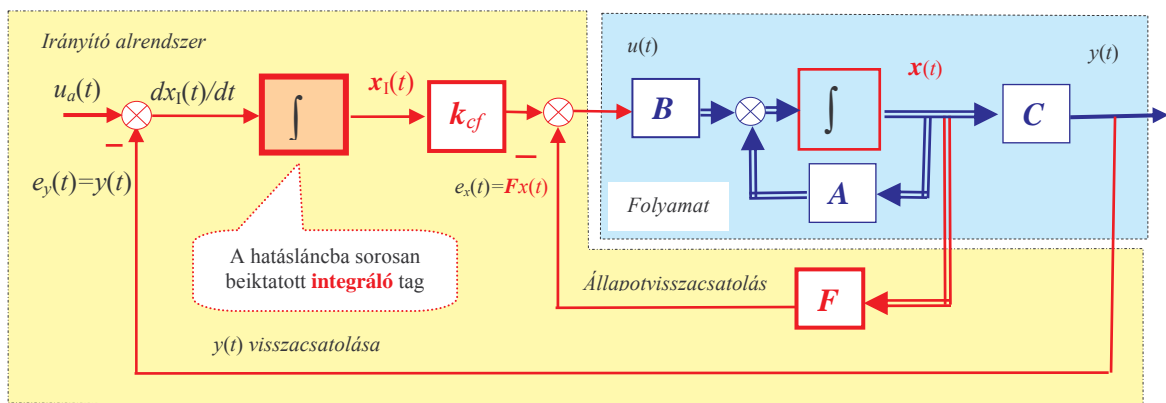
Állapotviszacsatolás (a. ábra)



Integráló taggal kiegészített állapotviszacsatolás (b. ábra)



2. ábra Integráló taggal bővített, állapotviszacsatolt rendszer



3. ábra Integráló taggal kiegészített állapotviszacsatolás hatásvázlata

Ez utóbbi kifejezésben A_a, B_a az Ackermann-formulának megfelelő, adott mátrixok. Ha az $n+1$ számú p_{Ri} pólust előzetesen felvesszük, akkor az F_a meghatározására az Ackermann-képlet már alkalmazható (MATLAB-támogatás: $F_a = \text{acker}(A_a, B_a, pR)$). Figyeljük meg, hogy az eredményül kapott $F_a = [F \quad k_{cf}]$ sorvektor egyik komponense a k_{cf} átviteli tényező.

Példa

A folyamat átviteli függvénye, állapotegyenlete és ennek paramétermátrixai:

$$W_p(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k_p}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)} = \frac{g_3}{s^3 + h_1s^2 + h_2s + h_3} = \frac{g_3}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$

$$= \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{(1+s)(1+\frac{1}{2}s)(1+\frac{1}{3}s)}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \frac{dx_3(t)}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -h_1 & -h_2 & -h_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{[0 \quad 0 \quad g_3]}_C \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 0 \quad 6] \quad D = 0.$$

Integráló taggal kiegészített állapotviszacsatolás alkalmazásával méretezzük a k_{cf} és F értékeket, ha az eredő rendszer előírt pólusai $p_{R1} = 3p_1 = -3, p_{R2} = 3p_2 = -6, p_{R3} = 3p_3 = -9, p_{R4} = -10$.

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MATLAB-támogatással:

```
Aa=[-6 -11 -6 0;1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 -6 0];Ba=[1 0 0 0]';
pR=[-3 -6 -9 -10];
Fa=acker(Aa,Ba,pR);F=Fa(1:3);kcf=-Fa(4);
disp(F);pause;disp(kcf);pause;
```

A program futásának eredménye: $F=[f_1 \quad f_2 \quad f_3]=[22 \quad 268 \quad 1146], k_{cf}=270$.

Állapotviszacsatolás LQR²-szabályozóval

Az előző fejezetekben tárgyalt $A, B, C, (D=0)$ paramétermátrixokkal leírt SISO-folyamat állapotviszacsatolásával kialakított irányítás során az F visszacsatolást létesítő sorvektort azon az elven méreteztük, hogy az eredő rendszer p_{Ri} pólusaira előírásokat fogalmaztunk meg (pole placement).

Az állapotegyenletével leírt folyamat optimális irányítását olyan módon is megfogalmazhatjuk, hogy keressük azt az $u(t)$ irányítójelet, amely a $t=0$ időpontban az $x(0) \neq 0$ állapotában kimozdított rendszert visszaviszi az $x(0)=0$ nyugalmi állapotába, miközben egy $J(x,u)$ mutatót szélső értéken tart. A J mutató egyes esetekben az irányított folyamat természetes jellemzője (pl. hatások, üzemanyag-fogyasztás, fajlagos költség stb.), más esetekben mesterségesen konstruált kifejezés. Ha az irányítás tranziens folyamatait szeretnénk optimálissá tenni, a $J(x,u)$ pillanatértékeit a tranziens teljes időintervallumára ($0 < t < t_v = \infty$) kell összegezni, ekkor a mutatót egy integrálformula írja le. Ebben a formulában a pillanatnyi minőséget az $x(t)$ állapotváltozók nyugalmi helyzetüktől való négyzetes eltéréseinek súlyozott összege jellemezheti. A kritériumban természetesen az $u(t)$ irányítójel négyzetes eltéréseinek is szerepelnie kell, mert költségkonzekvenciák nélkül az állapotváltozók átlagos, négyzetes eltéréseinek csökkentésére a tranziens folyamatoknak irreálisan nagy irányítójellel való gyorsítása lenne a kézenfekvő megoldás.

Lineáris folyamat irányítása négyzetes integrálkritérium alapján. Az LQR-szabályozás tervezése

Legyen az optimalizálandó költségfüggvény (SISO-folyamat esetében) a

$$J(x,u) = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{t_v=\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + ru^2(t)]dt$$

négyzetes integrálkritérium. Tervezési célkitűzésnek a $J(x,u)$ funkcionál $u(t) = u_{opt}(t)$ irányítójellel történő minimalizálását írjuk elő, miközben a stabilis rendszernek az állapotegyenlettel leírt sajátmozgása az állapotter origójába tart³. Ebben Q a folyamat $x(t)$ állapotvektorát súlyozó pozitív definit vagy pozitív szemidefinit mátrix, $R=r$ az $u(t)$ irányítójelet súlyozó pozitív skaláris tényező. A költségfüggvény integranduszában szereplő első tag az $x(t)$ állapotvektorra nézve egy korlátozást jelent. Q legegyszerűbb alakja egy diagonális mátrix, amelynek q_{ii} eleme a tervező által az $x_i(t)$ állapotváltozóra vonatkozó korlátozás súlyát jelenti. Az integrandusz második tagja az $u(t)$ irányítójelre vonatkozó korlátozást határozza meg, ezért R súlyozómátrix jelentősége ugyanaz az $u(t)$ -re nézve, mint a Q mátrixnak az $x(t)$ -re vonatkozóan (SISO-folyamat esetében R skaláris).

Folytatjuk!

szbela13@gmail.com, fjuhaszne@gmail.com

² LQR: Linear-Quadratic Regulator.

³ Az LQR-szabályozás egy általánosan is megfogalmazható, optimalizálási feladat speciális esete. Az általános feladatban a $dx(t)/dt=f[x(t),u(t)]$ nemlineáris állapotegyenlettel leírt folyamathoz keressük azt az $u_{opt}(t)$ irányítójelet, amely minimalizálja az

$$J(x(t),u(t)) = \int_0^{t_v} F[x(t),u(t)]dt$$

általános integrálkritériumot, miközben a mozgás kielégíti a rendszer $dx(t)/dt=f[x(t),u_{opt}(t)]$ állapotegyenletét.