

Szabályozástechnika 38.

Állapotirányítás, állapotirányítás megfigyelővel, optimális (LQR) irányítás – 8.

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencné

Az állapotvisszacsatolás alkalmazásával egy adott rendszer dinamikus tulajdonságait meghatározó – és a komplex síkon elhelyezkedő – p_i pólusait tetszőlegesen előírt p_{ri} értékekre „helyezhetjük át”. Ha például a visszacsatolatlan folyamat kis csillapítású lengéseket tartalmaz, akkor a megfelelően megválasztott p_{ri} pólusokkal ezek a kis csillapítású lengések a visszacsatolt rendszerből eltüntethetők. Az itt közölt leírásban azt is bemutatjuk, hogy az állapotvisszacsatolás struktúrája és a folyamattal soros kapcsolású PD-kompensáció lényegében egymásnak kölcsönösen megfelelő pólusátrendezést eredményezhetnek.

A 1. ábrán a folyamat p_1, p_2, p_3 pólusait és az állapotvisszacsatolt rendszer előírt p_{r1}, p_{r2}, p_{r3} pólusait ábrázoltuk. Figyeljük meg, hogy a folyamatnak egy kis csillapítású ($\xi=0,1$) domináns póluspárja van. A lengésmentes beállítás miatt a visszacsatolt rendszer mindhárom p_{r1}, p_{r2}, p_{r3} pólusának a negatív valós tengelyen kell lennie, miközben a p_1, p_2, p_3 és a p_{r1}, p_{r2}, p_{r3} pólusok abszolút értékeinek – a túlvezérlés elkerülésének céljából – azonosnak kell maradnia.

Az állapotváltozók visszacsatolásával kialakított struktúra a 2. ábrán látható.

Az F visszacsatoló sorvektort, a k_c átviteli tényezőt, a folyamat $v_p(t)$ és a rendszer $v_R(t)$ átmeneti függvényeit MATLAB-támogatással számítjuk:

```
T=0.5;To=1;ksi=0.1;kp=1;
Gp=kp;Hp=conv([T 1],[To^2 2*ksi*To 1]);
[A,B,C,D]=tf2ss(Gp,Hp);
pR=[-1/T -1/To -1/To];
F=acker(A,B,pR)
% f1=1.8000 f2=3.6000 f3=0.00001
kc=inv(C*inv(A-B*F)*B)*C*inv(A)*B
% kc=1
grid on;
step(A,B,C,D,1,0:0.1:20);
title('A folyamat vp(t) átmeneti függvénye');
pause;hold on;
step(A-B*F,B*kc,C,D,1,0:0.1:20);
title('A folyamat vp(t) és a rendszer vR(t)...
átmeneti függvényei');pause,clf;
```

1 Figyeljünk fel arra, hogy az $x_i(t)$ állapotváltozót – az $f_3=0$ miatt – nem kell visszacsatolni. Ennek magyarázata abban rejlik, hogy az állapotvisszacsatolással előírt új p_{ri} pólusok abszolút értékei azonosak a visszacsatolatlan rendszer p_i pólusainak abszolút értékeivel, és ezért a „pólusátrendezés” túlvezérlés nélkül valósul meg. Most az állapotvisszacsatolás célja nem a gyorsítás, hanem a lengés megszüntetése. Ismételten megjegyezzük, hogy az állapotvisszacsatolást az irányíthatósági kanonikus alak állapotváltozóiról létesítettük.

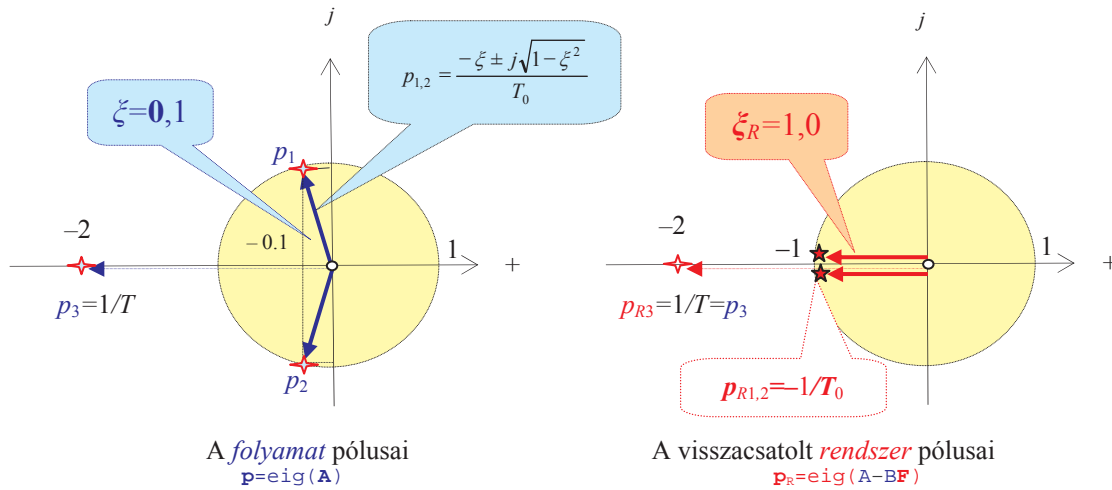
A program futásából kapott eredményt a 3. ábra mutatja. Mivel a folyamat és a rendszer állapotegyenleteit az irányíthatósági kanonikus alakban használtuk, és ennek állapotváltozóiról létesítettük az állapotvisszacsatolást, az Ackermann-képlet helyett a folyamat A állapotmátrixának és a rendszer $A-BF$ állapotmátrixának karakterisztikus egyenleteivel (a karakterisztikus egyenletek együtthatóinak összehasonlításával) is dolgozhatunk. Eszerint:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \lambda^3 + h_1 \lambda^2 + h_2 \lambda + h_3 \\ \det[\lambda I - (A - BF)] &= \lambda^3 + h_{r1} \lambda^2 + h_{r2} \lambda + h_{r3} = \\ &= \lambda^3 + (h_1 + f_1) \lambda^2 + (h_2 + f_2) \lambda + (h_3 + f_3). \end{aligned}$$

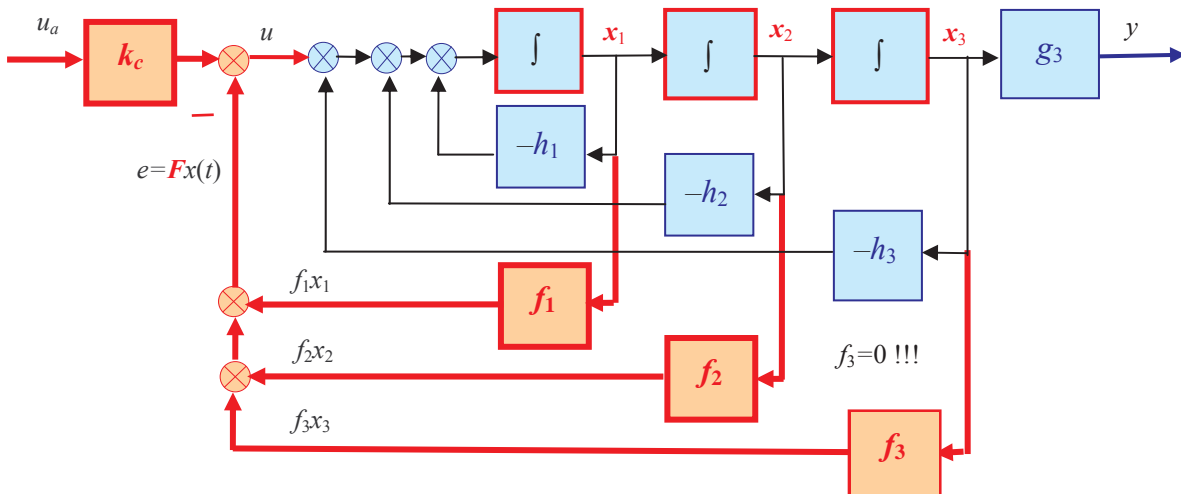
Ezekből:

$$\begin{aligned} h_1 + f_1 = h_{r1} \quad f_1 = h_{r1} - h_1 &= \frac{2T_0T + T_0^2}{T_0^2T} - \frac{2\xi T_0T + T_0^2}{T_0^2T} = \frac{2(1-\xi)}{T_0} = 1,8 \\ h_2 + f_2 = h_{r2} \quad f_2 = h_{r2} - h_2 &= \frac{2T_0 + T}{T_0^2T} - \frac{2\xi T_0 + T}{T_0^2T} = \frac{2(1-\xi)}{T_0T} = 3,6 \\ h_3 + f_3 = h_{r3} \quad f_3 = h_{r3} - h_3 &= \frac{1}{T_0^2T} - \frac{1}{T_0^2T} = 0 \end{aligned}$$

Ugyanennek a folyamatnak egy másfajta (nem az irányíthatósági kanonikus alaknak megfelelő) állapotváltozókról kialakított visszacsatolással megvalósított megoldását mutatja a 4. ábra. A folyamatot most egy egytárolós arányos tag (átviteli függvénye $k_p/(1+sT)$) és egy kéttárolós lengőtag (átviteli függvénye $1/(1+2\xi T_0s+T_0^2s^2)$) soros kapcsolása írja le. Ezeket külön-külön lineáris alaptagokat tartalmazó részstruktúrákkal jellemeztük, és az integráló tagok kiemelőjeleit most is állapotváltozóknak jelöltük. Figyeljük meg, hogy ez utóbbi struktúrában az integráló tagok nem alkotnak egymással



1. ábra A folyamat adott és a rendszer előírt pólusai

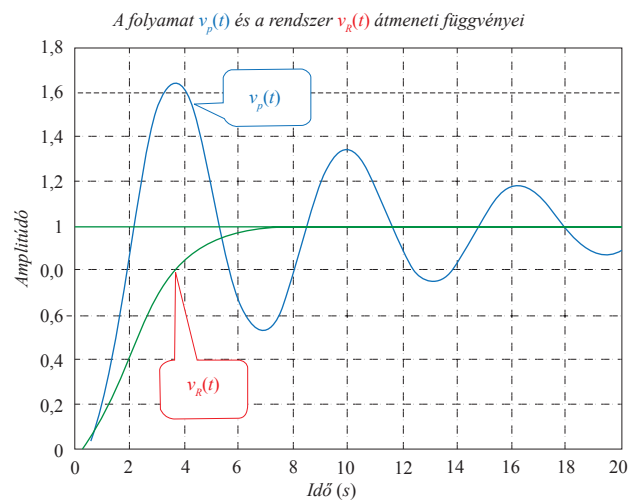


2. ábra Az állapotvisszacsatolt rendszer hatásvázlata

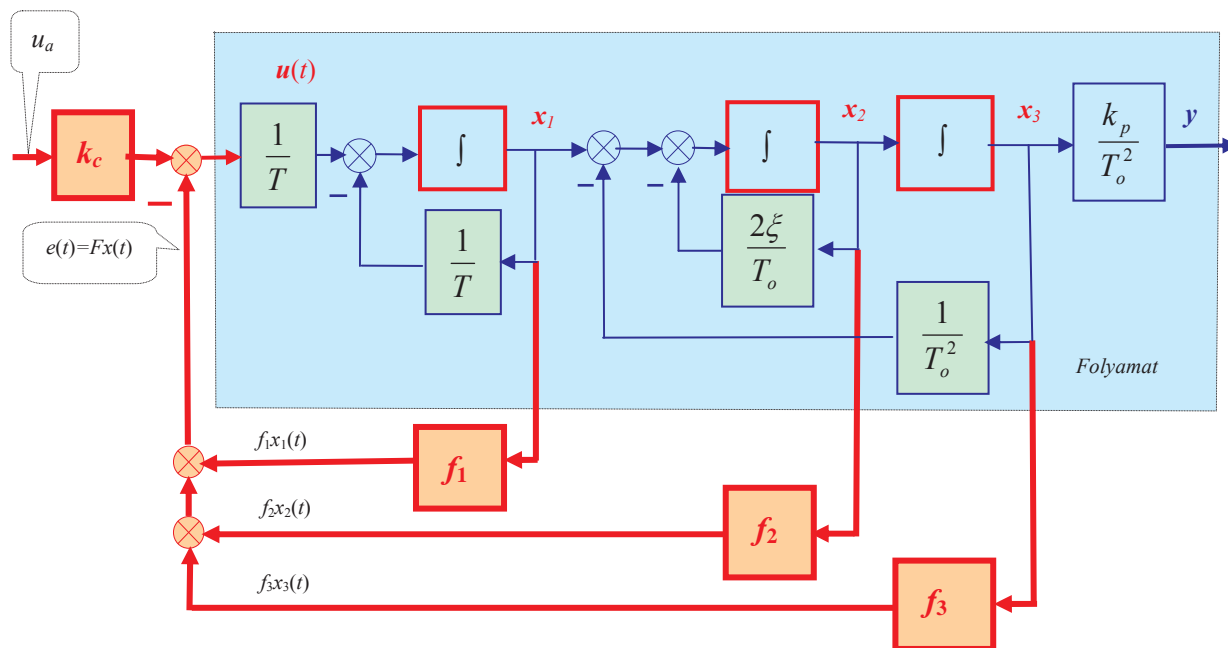
soros kapcsolású láncolatot. Az $F=[f_1 \ f_2 \ f_3]$ átviteli tényező sorvektora most nem lesz azonos az előzőekben kapott eredménnyel, mivel az állapotváltozók is mások, az állapotvisszacsatolás hatása azonban természetesen változatlan marad (a folyamat p_i pólusai változatlanok maradtak, és az eredő rendszer p_{Ri} előírt pólusait sem változtattuk meg). A „pólusáthelyezés” tényleges megvalósítása az $u(t)$ irányítójel megfelelő kialakításával valósul meg ($u(t)=k_c u_a(t)-F x(t)$), ezért az állapotváltozók másfajta megválasztása mellett is az előző struktúrának megfelelő $u(t)$ irányítójelet kell a folyamat bemenetén működtetni.

A folyamat állapotegyenlete és paramétermatrixai ez utóbbi struktúra esetében:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -\frac{1}{T} x_1(t) + \frac{1}{T} u(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_1(t) - \frac{2\xi}{T_0} x_2(t) - \frac{1}{T_0^2} x_3(t) \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= x_2(t) \\ y(t) &= \frac{k_p}{T_0^2} x_3(t) \end{aligned}$$

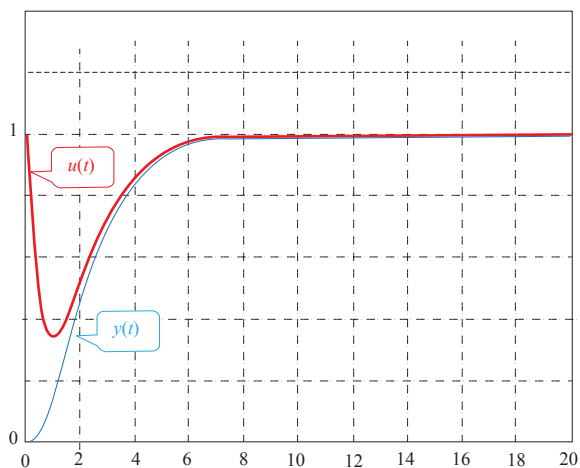


3. ábra Az állapotvisszacsatolás hatásának szemléltetése a folyamat $v_p(t)$ és a visszacsatolt rendszer $v_R(t)$ átmeneti függvényeivel



4. ábra Az állapotviszacsatolás egy másik struktúrája

A rendszer $u(t)$ irányítójele és $y(t)$ kimenőjele



5. ábra Az állapotviszacsatolt rendszer $u(t)$ és $y(t)$ időfüggvényei

```

kp=1;T=0.5;To=1;ksi=0.1;
A=[-1/T 0 0;1 -2*ksi/To -1/To^2;0 1 0];
B=[1/T 0 0]';C=[0 0 kp/To^2];D=0;
pR=[-1/T -1/To -1/To];
F=acker(A,B,pR); disp(F);pause;
% f1=0.9000 f2=1.6200 f3=-0.9000
kc=inv(C*inv(A-B*F)*B)*C*inv(A)*B;disp(kc);
pause;
% kc=1
grid on;
step(A,B,C,D,1,0:0.1:20);
title('A folyamat vp(t) átmeneti függvénye');
pause;hold on;step(A-B*F,B*kc,C,D,1,0:0.1:20);
title('A folyamat vp(t) és a rendszer vR(t)...
átmeneti függvényei');pause,clf;
[y,x]=step(A-B*F,B*kc,C,D,1,0:0.1:20);
e=F(:,1).*x(:,1)+F(:,2).*x(:,2)+F(:,3).*x(:,3);
u=kc*ones(1,length(e))-e';
t=0:0.1:20;plot(t,u');grid on;
hold on;plot(t,y);
title('A rendszer u(t) irányítójele');
pause; clf;
    
```

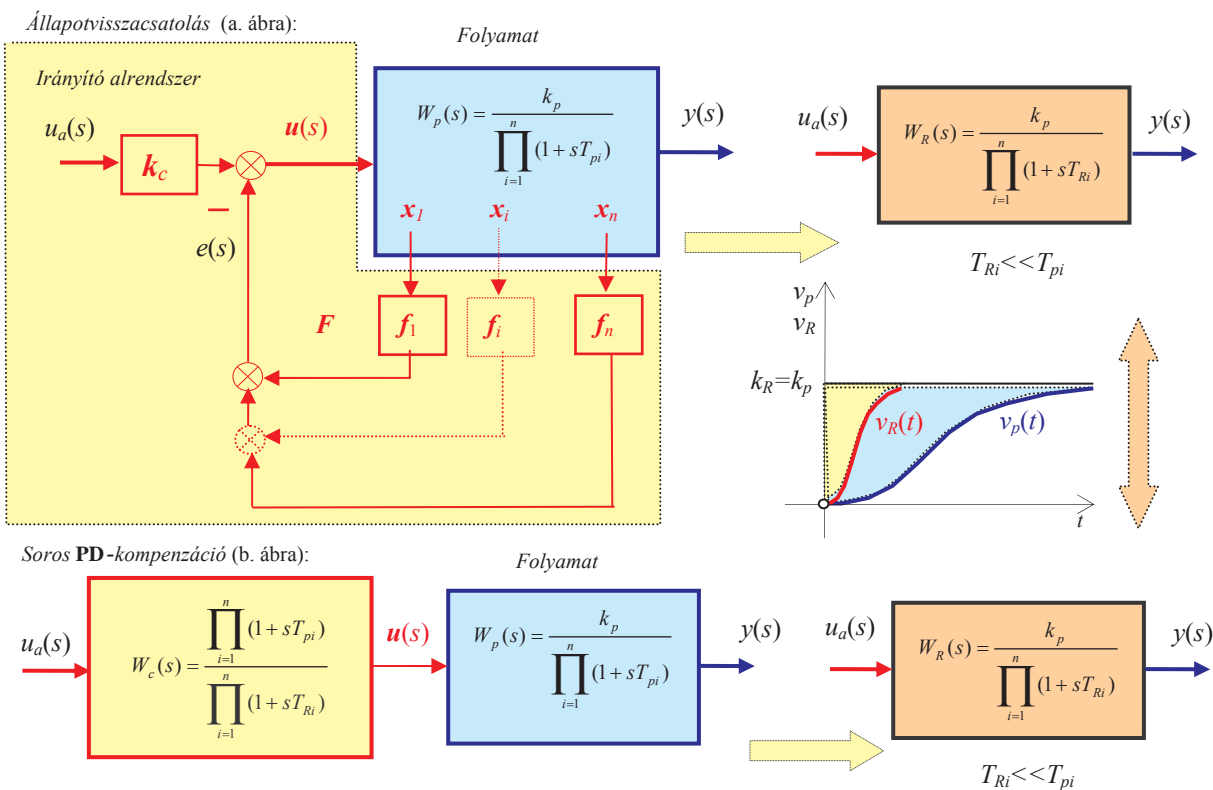
$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{2\xi}{T_o} & -\frac{1}{T_o^2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -0,2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{T} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k_p}{T_o^2} \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 1] \quad D = 0$$

Jelen esetben sem a folyamat, sem pedig a rendszer állapotegyenletei **nem** az irányíthatósági kanonikus alakban állnak rendelkezésre, ezért az F vektor meghatározására most az Ackermann-formula használható. MATLAB-támogatással:

A programfutás eredményeiből most az F sorvektor $f_1=0,9000$, $f_2=1,6200$, $f_3=-0,9000$ komponenseit és az $u_a(t)=\mathbf{1}(t)$ egységugrás bemenőjelre adott $u(t)$ és $y(t)$ válaszokat közöljük (5. ábra). Az f_3 negatív előjele az $x_3(t)$ állapotváltozó pozitív visszacsatolását jelenti.

Az $u(t)$ irányítójel időfüggvényéből látható, hogy az állapotviszacsatolás úgy „szedi ki” a kicsillapítású lengéseket a rendszerből, hogy az $u(t)$ irányítójelet a bekapcsolást követően azonnal és jelentős mértékben „visszaveszi”, majd ezt követően lassú „adagolással” a végértékére növeli. Ez a hatás nem függ attól, hogy a folyamat állapotváltozóit miként választjuk meg.



6. ábra Az állapotviszacsatolás és a soros PD-kompenzáció összehasonlítása

Az állapotviszacsatolás és a soros PD-kompenzáció összehasonlítása

Az állapotviszacsatolás alkalmazásával általában a

$$W_p(s) = \frac{k_p}{\prod_{i=1}^n (1 + sT_{pi})}$$

$$k_p > 0 \quad T_{pi} > 0 \quad n \geq 1 \quad p_i = -\frac{1}{T_{pi}} < 0$$

átviteli függvényű, önbeálló folyamat $T_{pi} > 0$ időállandóiból származó $p_i = -1/T_{pi}$ pólusait a rendszer $p_{Ri} = -1/T_{Ri}$ pólusaira „cserélhetjük” fel, és ha $T_{Ri} \ll T_{pi}$, akkor a rendszer lineáris szabályozási területe (a k_c korrekciós átviteli tényező megfelelő megválasztásával) $k_p \sum T_{pi}$ értékről $k_p \sum T_{Ri} \ll k_p \sum T_{pi}$ értékre csökkenthető ($i=1, 2, \dots, n$). Az irányító alrendszer ekkor *dinamikus tagokat nem tartalmaz*, ezért szerkezeti realizálása is viszonylag egyszerű. Hátránya viszont az, hogy az $x_i(t)$ állapotváltozókhöz mérés technikailag hozzá kell férni, és annyi érzékelőszervre van szükség, amennyi az állapotváltozók n száma (6a. ábra).

Hasonló feladat ellátására alkalmas a folyamattal *soros kapcsolást* alkotó n számú **PD** tagból felépülő

$$W_c(s) = \frac{\prod_{i=1}^n (1 + sT_{pi})}{\prod_{i=1}^n (1 + sT_{Ri})} \quad T_{pi} > T_{Ri} > 0 \quad n \geq 1 \quad p_{Ri} = -\frac{1}{T_{Ri}} < 0$$

átviteli függvényű, *soros kompenzáció*. Ez a folyamat $T_{pi} > 0$ időállandóit (a $p_i = -1/T_{pi}$ pólusait) a kompenzáló tag $T_{Ri} \ll T_{pi}$ időállandóira (a $p_{Ri} = -1/T_{Ri}$ pólusaira) „cseréli”, ami szintén a gyorsabb működést eredményezi (6b. ábra).

Természetesen a fizikai működés valóságában a soros **PD**-kompenzáció *is* az $u(t)$ irányítójel túlzérelésével hajtja végre a folyamat gyorsítását, és a túlzérelési arány $u_a(t) = \mathbf{1}(t)$ bemenőjel esetén:

$$u_t = \frac{\prod_{i=1}^n T_{pi}}{\prod_{i=1}^n T_{Ri}} = \frac{\prod_{i=1}^n p_{Ri}}{\prod_{i=1}^n p_i}$$

Ez azonos az állapotviszacsatoláskor keletkező túlzérelési aránnyal. A soros **PD**-kompenzáció **dinamikus tagokat** is tartalmaz (minden fokozata egy-egy integráló, valamint arányos és összegző alaptagokat), ezért realizálása az állapotviszacsatolás algebrai tagjaihoz képest körülményesebb. Előnye viszont az, hogy az állapotváltozók érzékelésére nincs szükség. Fontos megjegyeznünk, hogy az állapotviszacsatolás alkalmazásával a folyamat labilitását előidézhető pólusokat az s komplex sík stabilis tartományába helyezhetjük át. Ezzel szemben a soros **PD**-kompenzációval – az egzakt póluszérus kiejtés gyakorlatilag lehetetlen volta miatt – sem a folyamat labilis pólusát, sem pedig „labilis zérusát” eltüntetni nem lehet.

szbela@gmail.com, fjuhaszne@gmail.com