Szabályozástechnika 40.

Állapotirányítás, állapotirányítás megfigyelővel, optimális (LQR) irányítás – 10.

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencné

Az optimális (LQR) irányítás során a folyamat *u(t)* irányító jelét olyan módon kell tervezni, amelynek során egyrészt az *u(t)* gerjesztett *x(t)* állapotváltozó kielégíti az állapotegyenletet, másrészt minimalizál egy *J(x,u)* költségfüggvényt. Az *u(t)* tervezése – hasonlóan az előírt poluseloszlásra vonatkozó tervezés eredményéhez – az *x(t)* állapotváltozókról történő állapotvisszacsatolás létesítését eredményezi, és ekkor a visszacsatolás átviteli tényezőjének alkalmazásával kialakított struktúra a *J(x,u)* költségfüggvény minimalizálását realizálja.

Fizikailag az $u^T(t)Ru(t)$ integrálja energiajellegű mennyiség, ezért a $J(x,u)$ költségfüggvényt úgy értelmezhetjük, hogy az állapotegyenletet is kielégítő $x(t)$ állapotvektor úgy tartson az $x(0)\neq\mathbf{0}$ állapotából $x(t_v)=x(\infty)=\mathbf{0}$ egyensúlyi állapotához, hogy közben az energiafogyasztást a minimális szinten tartjuk. Ennek végrehajtása – itt nem részletezett, viszonylag bonyolult elméleti analízis eredményeként – olyan módon lehetséges, ha a folyamat $u(t)$ bemenőjelét az $x(t)$ állapotváltozóktól függően

$$u_{opt}(t)=-\boldsymbol{F}_{LQ}x(t)$$

szerint állítjuk elő, vagyis lényegét tekintve – hasonlóan az előírt sajátértékre történő tervezésnél alkalmazott eljáráshoz – most is a folyamat *x(t)* állapotvektoráról a folyamat bemenetére egy *állapotvisszacsatolást* létesítünk (1. ábra).

A kritériumot minimalizáló, $u_{opt}(t)=-F_{LQ}x(t)$ alakú állapotvisszacsatolás $\boldsymbol{F}_{LQ}$ átviteli tényezője a visszacsatoló sorvektor. Az $\boldsymbol{F}_{LQ}$ vektor értéke – az itt szintén nem részletezett, és viszonylag komplikált – szélsőérték-számítások alapján:

$$\boldsymbol{F}_{LQ}=\boldsymbol{R}^{-1}B^T\boldsymbol{S}\,,$$

ahol $\boldsymbol{R}$ és B ismert értékei mellett $\boldsymbol{S}$ egy szimmetrikus pozitív definit[1] mátrix, az

$$\boldsymbol{S}A+A^T\boldsymbol{S}-\boldsymbol{S}B\boldsymbol{R}^{-1}B^T\boldsymbol{S}+\boldsymbol{Q}=0$$

ún. algebrai *Riccati*-egyenlet megoldása. A *Riccati*-egyenlet **S**-re egy nemlineáris mátrixegyenlet, és általában csak numerikusan oldható meg[2]. Az állapotvisszacsatolás struktúrája tehát hasonló a korábbi pólusáthelyezésnél alkalmazott struktúrához, tőle abban különbözik, hogy az $\boldsymbol{F}_{LQ}$ visszacsatolás megválasztása most nem a zárt rendszerre előírt p_{Ri} póluseloszlás alapján, hanem a költségfüggvény minimalizálásának célkitűzése mellett történik (az F_{LQ} átviteli tényező sorvektorával visszacsatolt rendszernek természetesen létrejön a folyamat p_i pólusaitól eltérő p_{Ri} póluseloszlása, ami egyébként az $A_R=A-BF_{LQ}$ eredő állapotmátrix sajátértékeit jelenti). Ekkor az $\boldsymbol{F}_{LQ}=R^{-1}B^T\boldsymbol{S}$ visszacsatoló vektor kiszámítása láthatóan lényegesen körülményesebb. Az eredő visszacsatolt rendszer állapotegyenlete és A_R eredő állapotmátrixa[3]:

$$\frac{dx(t)}{dt}=\underbrace{(A-BF_{LQ})}_{A_R}x(t)=A_Rx(t)$$
$$y(t)=Cx(t)\,.$$

Ha az állapotvisszacsatolás F_{LQ} átviteli tényezőjét az adott módon választjuk meg, a $J(x,u)$ költségfüggvénynek minimuma van, és ennek értéke:

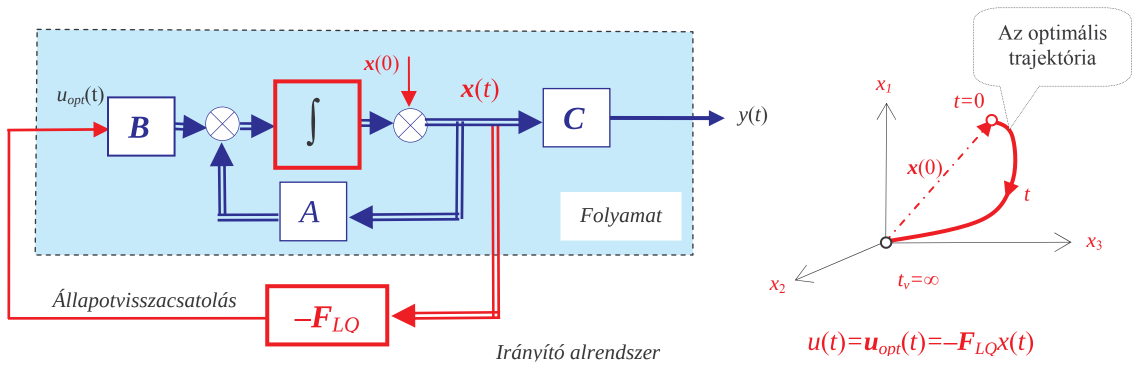
$$J_{\min}(x,u_{opt})=\frac{1}{2}x^T(0)Sx(0)\,.$$

Az algebrai *Riccati*-egyenlet **S** szimmetrikus, pozitív definit mátrixának megoldása tehát az $\boldsymbol{F}_{LQ}$ visszacsatolásban játszott alapvető szerepe mellett J_{min} értékét is meghatározza.

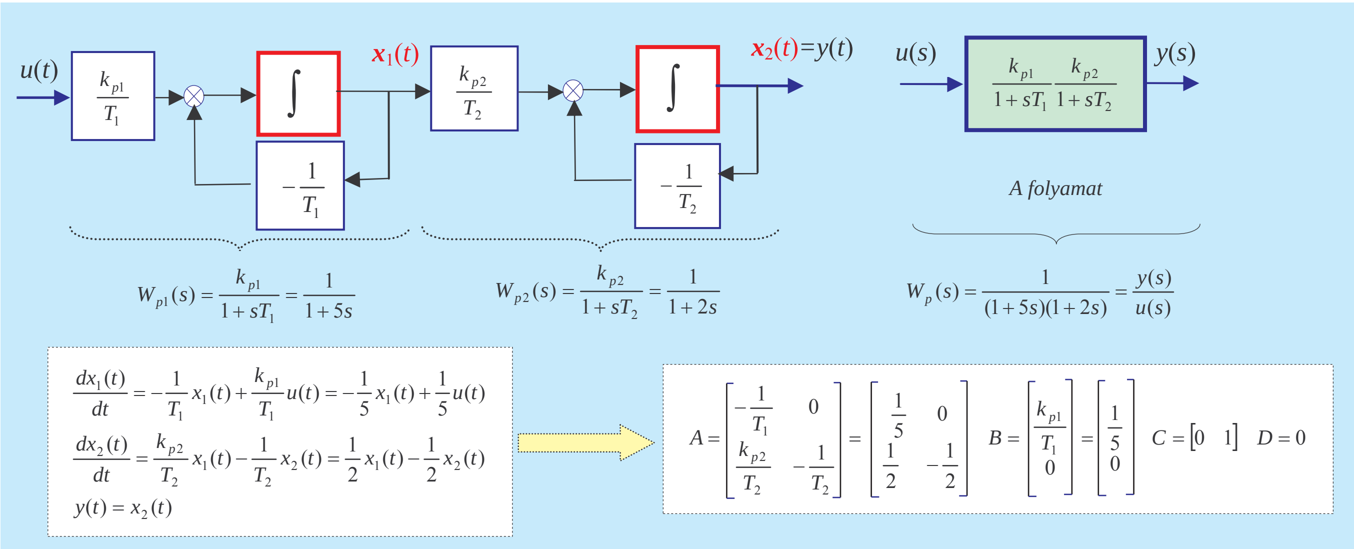
1 Szimmetrikus az **S** mátrix, ha elemei közötti kapcsolat $s_{ij}=s_{ji}$. *Pozitív definit* az *S* mátrix, ha $det(\lambda I-S)=0$ karakterisztikus egyenletének mindegyik gyöke pozitív.

2 Elsőrendű, aszimptotikusan stabilis **SISO**-folyamat esetében a folyamat paramétermátrixai $A=a<0$, $B=b$. Ekkor $Q=q$ és $R=r$ skaláris mennyiségek, ezért $\boldsymbol{S}a+a^T\boldsymbol{S}-\boldsymbol{S}br^{-1}b^T\boldsymbol{S}+q=0$ → $-\boldsymbol{S}^2bb^T+r(a+a^T)\boldsymbol{S}+qr=0$, ami **S**-ben másodfokú, emiatt analitikusan is kezelhető ($bb^T=b^2$, $a+a^T=2a$). Miután a négyzetes tagok miatt a megoldás nem egyértelmű, **S** tényleges értékét ennek pozitív definitsége alapján lehet kiválasztani. Magasabb rendszám esetében az **S** mátrix meghatározására számítógépes módszereket kell igénybe venni.

3 Az eredő rendszer $A_R=A-B\boldsymbol{F}_{LQ}$ állapotmátrixa hasonló a zárt rendszer előírt sajátértékekre történő tervezésnél kapott $A_R=A-B\boldsymbol{F}$ eredő állapotmátrixhoz, de most az $\boldsymbol{F}_{LQ}$ visszacsatolás sorvektorát a *költségfüggvény minimalizálásának* előírása alapján kell megválasztani.



1. ábra Az LQR-állapotvisszacsatolás hatásvázlata



2. ábra Másodrendű folyamat hatásvázlata, átviteli függvénye, állapotegyenlete és paramétermátrixai

Az **LQR**-irányítás egyszerűbb változata, amikor a költségfüggvényben az $x(t)$ állapotvektor helyett az $y(t)$ kimenőjel négyzetét súlyozzuk. Ekkor a **SISO**-folyamatban a $Q_y=q_y$ is skaláris, és a minimalizálandó költségfüggvény:

$$J(y,u)=\frac{1}{2}\int_{t=0}^{\infty}[y^T(t)Q_y y(t)+u^T(t)Ru(t)]dt=\frac{1}{2}\int_{t=0}^{\infty}[q_y y^2(t)+ru^2(t)]dt.$$

Figyelembe véve, hogy a folyamat állapotegyenlete alapján $D=0$ mellett $y(t)=Cx(t)$, ill. $y^T(t)=x^T(t)C^T$, azonos átalakításokkal kapjuk[4]:

$$q_y y^2(t)=y^T(t)q_y y(t)=x^T(t)C^T q_y Cx(t)=x^T(t)(C^T q_y C)x(t)=$$
$$=x^T(t)(q_y C^T C)x(t).$$

Ekkor az utóbbi integrál visszavezethető az eredeti **LQR**-szabályozás költségfüggvényére, ha speciálisan $Q=q_y C^T C$ súlyozótényezőt választunk.

4 A mátrixalgebrában a transzponáltakra vonatkozó néhány műveleti szabály: Az *A* mátrix A^T transzponáltja az a mátrix, amelyet az *A megfelelő* sorainak és oszlopainak felcseréléséből kapjuk. $(A^T)^T=A$, $(kA)^T=kA^T$ (*k* skaláris tényező), $(A+B)^T=A^T+B^T$, $(AB)^T=B^TA^T$.

Megjegyzés

Az F_{LQ} sorvektor meghatározását a **MATLAB**
`[FLQ,S,lambdaR]=lqr(A,B,Q,R)`, ill. az
`[FLQ,S,lambdaR]=lqry(A,B,C,D,qy,r)`
függvénye támogatja. A folyamat *A, B, C, D* paramétermátrixainak, valamint az előírt *Q* és *R* súlyozó tényezőknek ismeretében ez a függvény kiszámítja a *Riccati*-egyenlet **S** megoldását, az F_{LQ} visszacsatolás sorvektorát, valamint az $A_R=A-BF_{LQ}$ állapotmátrix $\lambda_R=p_{Ri}$ sajátértékeit. Részletezve:

```
A=input('A=');B=input('B=');
Q=input('Q=');R=input('R=');
[FLQ,S,lambdaR]=lqr(A,B,Q,R);disp(FLQ);
disp(S);disp(lambdaR);
A=input('A=');B=input('B=');
C=input('B=');D=input('D=');
qy=input('qy=');r=input('r=');
[FLQ,S,lambdaR]=lqry(A,B,C,D,qy,r);
disp(FLQ);disp(S);disp(lambdaR);
```

Példa

Kéttárolós, önbeálló SISO-*folyamat* hatásvázlata a $W_{p1}(s)$, $W_{p2}(s)$ átviteli függvényű, egymással soros kapcsolást alkotó, egytárolós tagokkal írható le (2. ábra). Az egytárolós tagok alaptagokkal felépített hatásvázlat-struktúrái integráló alaptagok negatív visszacsatolásával jellemezhetők, ezek kimenőjelei a folyamat $x_1(t)$, $x_2(t)$ állapotváltozói. Az alaptagokkal felépített hatásvázlat alapján a folyamat átviteli függvénye, állapotegyenletének egyfajta reprezentációja és az ennek megfelelő A, B, C, D paramétermátrixai egyszerűen felírhatók[5].

A minimalizálandó költségfüggvény az adott

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad R=r=\begin{cases} r_1=0{,}0001 \\ r_2=0{,}0100\end{cases}$$

súlyozási tényezők mellett:

$$J(x,u)=\int_{t=0}^{t_v=\infty}[x^T(t)Qx(t)+ru^2(t)]dt=$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{t=0}^{t_v=\infty}[x^T(t)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}x(t)+0{,}0001u^2(t)]dt\\ \displaystyle\int_{t=0}^{t_v=\infty}[x^T(t)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}x(t)+0{,}01u^2(t)]dt.\end{cases}$$

Határozzuk meg r mindkét értékére az állapotvisszacsatolás $\boldsymbol{F}_{LQ}$ átviteli tényezőjét, az $u_{opt}(t)=-\boldsymbol{F}_{LQ}x(t)$ optimális irányítójelet és az állapotváltozók $x_1(t)$, $x_2(t)$ időfüggvényeit. Az x_1~x_2 állapotsíkon ábrázoljuk az optimális rendszer $x_2(x_1)$ állapottrajektóriáit, ha a rendszer sajátmozgását az $x(0)=[x_1(0)\ \ x_2(0)]^T=[1\ \ 1]^T$ kezdeti feltételek generálják.

Megoldás

A számításokat MATLAB-támogatással végezzük. Először kiszámítjuk a folyamat $x(0)=[x_1(0)\ x_2(0)]^T$ kezdeti feltételek által generált *sajátmozgását* állapotvisszacsatolás nélkül ($\boldsymbol{F}_{LQ}$=0, `initial`), majd r=0,0001 és r=0,01 esetekre meghatározzuk az optimális $\boldsymbol{F}_{LQ1}$ és $\boldsymbol{F}_{LQ2}$ átviteli tényezők sorvektorait (`[FLQ,S,lambdaR]=lqr(A,B,Q,R)`). Ezek ismeretében mindkét esetre kiszámítjuk és ábrázoljuk az $x_1(t)$, $x_2(t)$ állapotváltozók időfüggvényeit (`plot(t,x)`) és az $x_2(x_1)$ állapottrajektóriákat (`plot(x(:1),x(:,2))`), valamint meghatározzuk a költségfüggvények J_{1min}, J_{2min} minimumait is. A program befejező részében az $u_{opt}(t)$ irányítójeleket számítjuk és ábrázoljuk (`plot(t,uopt)`).

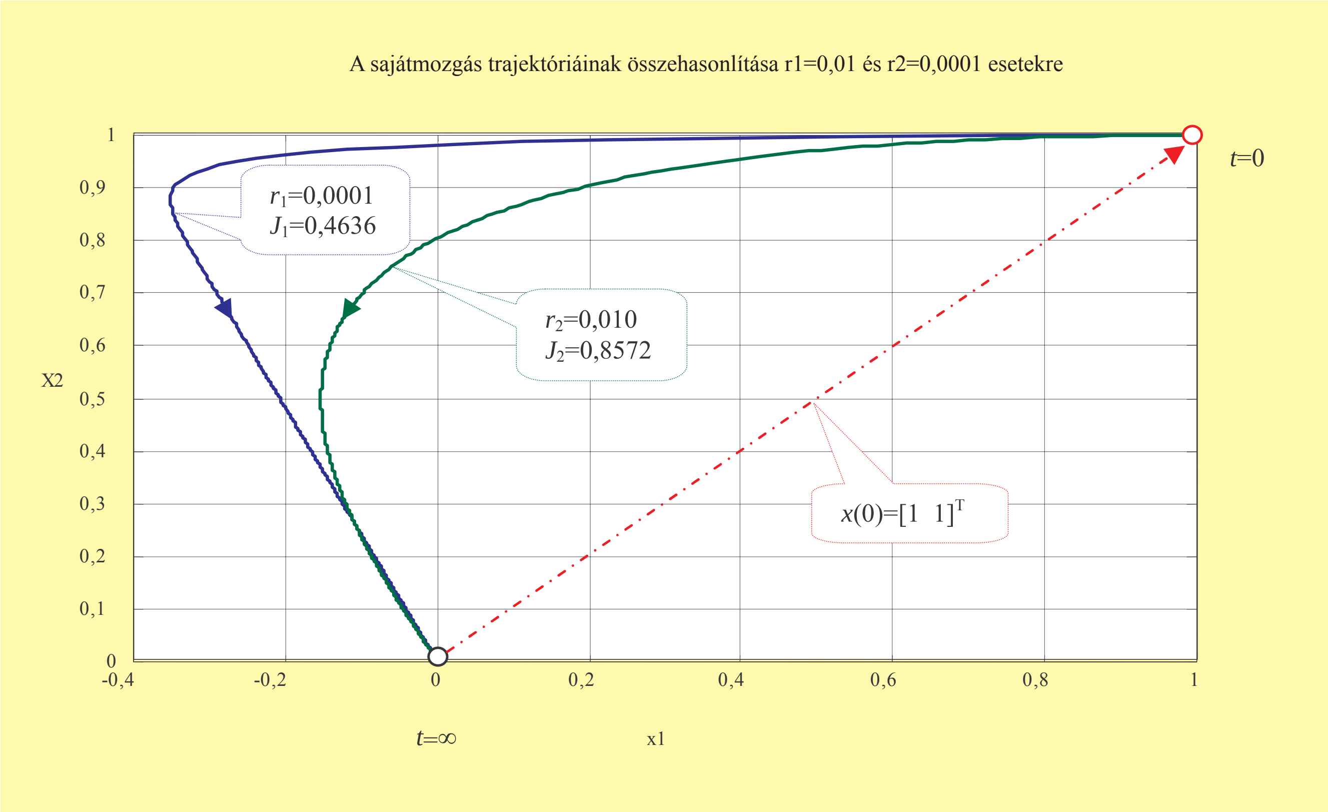
Megjegyzés

Az adatbekérés során az `A=[-0.2 0.0;0.5 -0.5];A=input('A=')` stb. beviteli formának az ad értelmet, hogy a számpélda alapadatain túlmenően más paramétermátrixokra, $x(0)$ kezdeti feltételekre, Q és r súlyozó tényezőkre is felhasználhatjuk a másodrendű folyamat esetére készített programot. Ha a példa számadataival kívánjuk a futtatást, az adatbekérésnél az alapadatok változóját kell billentyűzni (pl. `A=input('A=');A=(A`→ enter). A vizsgálatok időintervallumát a folyamat állapotmátrixából számítható legnagyobb időállandó alapján választhatjuk meg. A másodrendű SISO-folyamatról feltételezzük, hogy átmeneti függvénye a t=0 időpontban $v_p(t)_{t=0}$=0, ami a D paramétermátrix D=0 értékének felel meg. A program az állapotvisszacsatolt rendszer sajátmozgásának $x_1(t)$, $x_2(t)$ állapotváltozóin túlmenően kiszámítja és az állapotsíkon ábrázolja az $x_2(x_1)$ állapottrajektóriákat is, amelyek értelemszerűen az állapotsík $x(0)=[x_1(0)\ x_2(0)]^T$ kezdeti feltételeknek megfelelő pontjából indulnak, és az állapotsík $x(0)=[0\ \ 0]^T$ origójába tartanak.

A MATLAB-program:

```
echo on
%========================================
% Másodrendű SISO-folyamat LQR szabályo
% zásának analízise és szintézise
%========================================
A=[-0.2 0.0;0.5 -0.5];A=input('A=');
B=[0.2 0.0]';B=input('B=');
C=[0.0 1.0];C=input('C=');D=0.0;
x0=[1 1]';x0=input('x0=');
t=0:0.01:abs(min(5*(1/eig(A))));
[y,x,t]=initial(A,B,C,D,x0,t);plot(t,x);
grid on;
title('A sajátmozgás állapotváltozói,...
FLQ=0 esetre');xlabel('t');
ylabel('x1,x2');pause;
plot(x(:,1),x(:,2));grid on;
title('A sajátmozgás trajektóriája');
xlabel('x1');ylabel('x2');pause;
%=====================
Q=[1 0;0 1];Q=input('Q=');r1=0.0001;
r1=input('r1=');r2=0.01;r2=input('r2=');
[FLQ1,S1,lambdaR1]=lqr(A,B,Q,r1);
[FLQ2,S2,lambdaR2]=lqr(A,B,Q,r2);
disp('FLQ1=');disp(FLQ1);disp('S1=');
disp(S1);disp('lambdaR1=');
disp(lambdaR1);pause;
disp('FLQ2=');disp(FLQ2);disp('S1=');
disp(S2);disp('lambdaR2=');disp(lambdaR2);
pause;
[y1,x1,t]=initial(A-B*FLQ1,B,C,D,x0,t);
plot(t,x1);grid on;
title('A sajátmozgás állapotváltozói,...
r1=0.0001');xlabel('t');ylabel('x1,x2');
pause;
plot(x1(:,1),x1(:,2));grid on;
title('A sajátmozgás trajektóriája,...
r1=0.0001');xlabel('x1');ylabel('x2');
pause;
[y2,x2,t]=initial(A-B*FLQ2,B,C,D,x0,t);
plot(t,x2);grid on;
title('A sajátmozgás állapotváltozói,...
r1=0.01');xlabel('t');ylabel('x1,x2');
pause;
plot(x2(:,1),x2(:,2));grid on;
title('A sajátmozgás trajektóriája,...
r1=0.01');xlabel('x1');ylabel('x2');
pause;
```

5 A kéttárolós tag alaptagokból felépített hatásvázlata többféle módon előállítható (pl. az átviteli függvény *közvetlen* vagy *párhuzamos* felbontása alapján is). Természetesen ekkor az állapotegyenlet is más-más kifejezés lenne.



3. ábra Az optimális trajektóriák

```
J1=(x0'*S1*x0)/2;J2=(x0'*S2*x0)/2 ;
disp([r1 J1 r2 J2]);pause;
%=====================
plot(x1(:,1),x1(:,2),x2(:,1),x2(:,2));
grid on;title('A sajátmozgás trajektóriáinak...
összehasonlítása, r1=0.01,r2=0.0001 ese...
tekre');
xlabel('x1');ylabel('x2');pause;
%=====================
plot(x(:,1),x(:,2),x1(:,1),x1(:,2),
x2(:,1),x2(:,2));grid on;
title('A sajátmozgás trajektóriáinak...
összehasonlítása,FLQ=0,r1=0.01,r2=0.0001...
esetekre');
xlabel('x1');ylabel('x2');pause;
%=====================================
uopt1=-FLQ1(:,1).*x1(:,1)...
-FLQ1(:,2).*x1(:,2);
uopt2=-FLQ2(:,1).*x2(:,1)...
-FLQ2(:,2).*x2(:,2);
plot(t,uopt1,t,uopt2);grid on;
title('Az optimális uopt(t)irányítójelek...
r1=0.0001 és r2=0.01 értékek mellett');
disp('[max(uopt1) max(uopt2)]');
disp([max(uopt1) max(uopt2)]);pause;
%=====================================
disp('vége');
```

A program futásának egyik eredményeként az r_1 és r_2 súlyozó tényezőknek megfelelő $\boldsymbol{F}_{LQ}$, $\boldsymbol{S}$, λ_R, $max(u_{opt}(t))$ adatokat, valamint az $x_2(x_1)$ trajektóriákat (lásd 3. ábra) adtuk meg (További eredmények – pl. az állapotváltozók és az irányítójel időfüggvényei stb. – a program futtatásából kaphatók.)

r_1=0,0001	r_2=0,0100
F_{LQ1}= 100,0103 40,4146	F_{LQ2}= 9,8468 3,3306
S_1= 0,0500 0,0202; 0,0202 0,8367	S_2= 0,4923 0,1665; 0,1665 0,8891
*lambdaR*1= –19,9947 –0,7073	*lambdaR*2= –1,9377 –0,7317
J_1=0,4636	J_2=0,8572
$max(\boldsymbol{u}_{opt1}(t))$=140,4219	$max(\boldsymbol{u}_{opt2}(t))$=13,1774

Folytatjuk!

szbela13@gmail.com, fjuhaszne@gmail.com