

# Szabályozástechnika 37.

## Állapotirányítás, állapotirányítás megfigyelővel, optimális (LQR) irányítás – 7.

Dr. Szilágyi Béla – Dr. Juhász Ferencné

Ha az állapotvisszacsatolást a folyamat  $x(t)$  állapotváltozóiról nem tudjuk megvalósítani, akkor el kell készíteni a folyamattal párhuzamosan futó matematikai folyamatmodellt (a megfigyelőt), és ennek  $x^*(t)$  állapotváltozóiról lehet megvalósítani az állapotvisszacsatolást. Ezt a megfigyelőt egy digitális számítógépen futó program is realizálhatja.

Az alrendszeret leíró állapotegyenletekből és az  $x_R(t) = [x(t) \ x^*(t)]^T$ ,  $y_R(t) = [y(t) \ u(t) \ h(t)]^T$  jelölések bevezetésével<sup>1</sup> az eredő rendszer matematikai modellje is a szokásos állapotegyenleti formára hozható:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dx^*(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BF \\ MC & A - BF - MC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x^*(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bk_c \\ Bk_c \end{bmatrix} u_a(t)$$

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \\ h(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0_{1 \times n} \\ 0_{1 \times n} & -F \\ I_{n \times n} & -I_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x^*(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_c \\ 0_{n \times 1} \end{bmatrix} u_a(t).$$

A bevezetett jelölésekkel az eredő rendszer matematikai modelljének állapotegyenlet formában felírható alakja:

$$\frac{dx_R(t)}{dt} = A_{RM} x_R(t) + B_{RM} u_a(t)$$

$$y_R(t) = C_{RM} x_R(t) + D_{RM} u_a(t).$$

<sup>1</sup> A rendszer állapotvektora a folyamat  $x(t)$  és a megfigyelő  $x^*(t)$  állapotvektorából (egy eredő  $2n \times 1$  méretű  $x_R$  oszlopvektorba) rakható össze. Az  $y_R(t)$  kimenőjelvektor komponenseinek értelemszerűen a folyamat  $y(t)$  kimenő- és  $u(t)$  bemenőjeleit vesszük fel, kiegészítve ezeket a virtuálisan jelenlévő, a folyamat és a modell közötti hibának értelmezhető  $h(t) = x(t) - x^*(t)$  vektorral. Ennek megfelelően az  $y_R$  oszlopvektor mérete  $(2+n) \times 1$ . Az eredő rendszernek ezzel egy bemenete ( $u_a$ ) és több kimenete ( $y, u, h$ ) van (SIMO-rendszer).

Az eredő rendszer paramétermátrixai:

$$A_{RM} = \begin{bmatrix} A & -BF \\ MC & A - BF - MC \end{bmatrix} \quad B_{RM} = \begin{bmatrix} Bk_c \\ Bk_c \end{bmatrix}$$

$$C_{RM} = \begin{bmatrix} C & 0_{1 \times n} \\ 0_{1 \times n} & -F \\ I_{n \times n} & -I_{n \times n} \end{bmatrix} \quad D_{RM} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_c \\ 0_{n \times 1} \end{bmatrix}.$$

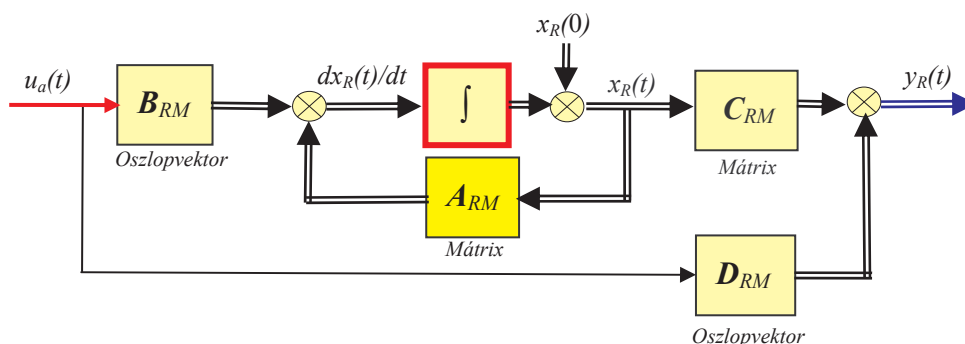
Az eredő rendszer állapotegyenletéhez rendelhető hatásvázlat az 1. ábrán található.

Az  $A_{RM}$  eredő állapotmátrix karakterisztikus egyenlete:

$$\det(\lambda I - A_{RM}) = \det[\lambda I - (A - BF)] \det[\lambda I - (A - MC)] = 0.$$

Az aszimptotikus stabilitás biztosításához tehát az  $A - BF$  és az  $A - MC$  mátrixoknak külön-külön is negatív valós részű sajátértékekkel kell rendelkezniük (a szeparáció elve<sup>2</sup>). Ez egyébként a folyamat és a megfigyelő mintegy párhuzamos kapcsolásából is következik. Vegyük észre, hogy a megfigyelő alkalmazásával kialakított állapotirányítás irányító alrendszere a folyamat dinamikáját is tartalmazó *dinamikus* rendszer, emiatt ennek rendszáma azonos a folyamat  $n$  rendszámával, a teljes rendszer rendszáma tehát  $2n$ .

<sup>2</sup> A szeparáció elvének értelmében az állapotvisszacsatolás ( $F$ ) és a megfigyelő ( $M$ ) egymástól függetlenül tervezhető, vagyis az  $F$  és  $M$  visszacsatolások (a  $\lambda_R$ , ill.  $\lambda_M$  sajátértékek) átviteli tényezői egymástól függetlenül tetszőlegesen megválaszthatók.



1. ábra A megfigyelőről létesített állapotviszacsatolás eredő rendszerének hatásvázlata

### A méretezést támogató MATLAB-program

A rendszer méretezésére és vizsgálatára alkalmas MATLAB-program:

```

echo on
%Adatbevitel
Gp=input('Gp=');Hp=input('Hp=');
% Wp=Gp(s)/Hp(s)
[A,B,C,D]=tf2ss(Gp,Hp);
% A folyamat paramétermátrixai
A=input('A=');B=input('B=');C=input('C=');
D=0;
step(A,B,C,D);grid;pause;
% A folyamat átmeneti függvénye
n=length(A);
% A folyamat rendszáma
p=eig(A);
% A folyamat pólusai

% A méretezési követelmények
pR=input('pR=');
% A rendszer előírt pólusai
pM=input('pM=');
% A megfigyelő előírt pólusai
disp([p pR' pM']);

% Az állapotviszacsatolás méretezése
F=acker(A,B,pR);
kc=inv(C*inv(A-B*F)*B)*C*inv(A)*B;

% A megfigyelő méretezése
MT=acker(A',C',pM);M=MT';
% A méretezés eredményeinek megjelenítése
FMT=[F;MT];ut=inv(1+F*inv(A-B*F)*B);
disp(FMT);pause;disp([kc ut]);pause;

% A méretezés ellenőrzése
% A rendszer paramétermátrixai
AR=[A -B*F;M*C A-B*F-M*C];BR=[B*kc;B*kc];
CR=[C zeros(1,n);zeros(1,n)-F;...
eye(n)-eye(n)];DR=[0;kc;zeros(n,1)];

```

```

printsys(AR,BR,CR,DR);pause;
kR=dcgain(AR,BR,CR,DR);disp(kR);pause;

```

```

% A rendszer átviteli-, és átmeneti függvé-
% nyeinek meghatározása
[GR,HR]=ss2tf(AR,BR,CR,DR);
% A rendszer átviteli mátrixa
step(GR(1,:),HR);grid;pause;hold;
% A vR(t) átmeneti függvény
step(A,B,C,D);pause;clf;
% A vp(t) átmeneti függvény
step(GR(2,:),HR);grid;pause;
% Az u(t) irányítójel
% A rendszer szimulációja
xpo=input('xpo=');
% A folyamat állapotváltozóinak kezdeti érté-
% kei
xmo=input('xmo=');
% A megfigyelő állapotváltozóinak kezdeti ér-
% tékei
xRo=[xpo xmo]';
tmax=input('tmax=');t=linspace(0,tmax,1000);
ua=ones(1,length(t));
% Az ua(t) alapjel
[yRi,xRi]=initial(AR,BR,CR,DR,xRo,t);
% A rendszer sajátmozgása
initial(AR,BR,CR,DR,xRo);
grid;pause;plot(t,xRi);grid;pause;
for i=1:n
plot(t,xRi(:,i),t,xRi(:,i+n));grid;pause;
% Az x(t)és x*(t) jelek
end;
[yR,xR]=lsim(AR,BR,CR,DR,ua,t,xRo);
% A rendszer gerjesztett mozgása
lsim(AR,BR,CR,DR,ua,t,xRo);
grid;plot(t,xR);grid;
for i=1:n
plot(t,xR(:,i),t,xR(:,i+n));grid;pause;
% Az x(t)és x*(t) jelek
end;
disp('vége')

```

**Példa**

A harmadrendű, önbeálló folyamat  $W_p(s)$  átviteli függvényével definiált:

$$W_p(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{g_3}{s^3 + h_1s^2 + h_2s + h_3} = \frac{g_3}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

állapotmegfigyelő alkalmazásával – a folyamat  $k_p = g_3/h_3 = 1$  erősítésének megtartása mellett – tervezzünk olyan állapotviszacsatolt rendszert, amelyben a felgyorsított rendszer előírt pólusai  $p_{R1} = -3$ ,  $p_{R2} = -6$ ,  $p_{R3} = -9$ , a megfigyelő pólusai pedig  $p_{M1} = p_{M2} = p_{M3} = -10$ .

A folyamat irányíthatósági kanonikus alaknak megfelelő állapotegyenlete és ennek paramétermátrixai:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -h_1x_1(t) - h_2x_2(t) - h_3x_3(t) + u(t) = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + u \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_1(t) \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= x_2(t) \\ y(t) &= g_3x_3(t) = 6x_3(t) \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} -h_1 & -h_2 & -h_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad g_3] = [0 \quad 0 \quad 6] \quad D = 0.$$

**Megjegyzés**

Figyeljük meg, hogy a visszacsatolatlan folyamat stabilis (mind-egyik  $p_i$  pólusa negatív érték), és az állapotviszacsatolás alkalmazásával az új  $p_{Ri}$  pólusokat az eredeti pólusok háromszorosára írtuk elő. Az átviteli függvény közvetlen felbontását alkalmaztuk, ezért az integráló tagok láncolatának állapotváltozói az állapotegyenlet irányíthatósági kanonikus alakjának felírását teszik lehetővé. Ekkor az  $A$  állapotmátrix első sorában a karakterisztikus egyenlet  $-h_1, -h_2, -h_3$  negatív együtthatói állnak. A visszacsatolt rendszer legkisebb pólusa  $p_{R3} = -9$ . Ennek megfelelően a megfigyelő pólusait  $p_{M1} = p_{M2} = p_{M3} = -10$ -re választjuk. A rendszer méretezését az előző programmal végeztük. A kapott eredmények:

```
F=acker(A,B,pR)
% f1=12 f2=88 f3=156
kc=inv(C*inv(A-B*F)*B)*C*inv(A)*B
% kc=27
ut=inv(1+F*inv(A-B*F)*B)
% ut=27
MT=acker(A',C',pM)
% m1=-23,33 m2=24,16 m3=4,00
```

A megfigyelőről létesített állapotviszacsatolás eredő rendszerének hatásvázlata a 2. ábrán látható.

**Példa**

Egy harmadrendű, kiscsillapítású ( $\xi=0,1$ ), lengéseket tartalmazó, önbeálló folyamat  $W_p(s)$  átviteli függvénye:

$$W_p(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k_p}{(1+sT)(1+2\xi T_0s+T_0^2s^2)} = \frac{1}{(1+0,5s)(1+0,2s+s^2)}$$

$(k_p = 1, \quad T = 0,5, \quad T_0 = 1, \quad \xi = 0,1).$

A folyamat állapotváltozói az irányíthatósági kanonikus alakban állnak rendelkezésre. Tervezzünk olyan állapotviszacsatolt tartalmazó rendszert, amely *túlvezérlés nélkül* a visszacsatolt rendszer csillapítási tényezőjét az aperiodikus állapot határesetére állítja be. A folyamat differenciálegyenlete a  $W_p(s)$  átviteli függvényének alapján:

$$\begin{aligned} T_0^2T \frac{d^3y(t)}{dt^3} + (2\xi T_0T + T_0^2) \frac{d^2y(t)}{dt^2} + (2\xi T_0 + T) \frac{dy(t)}{dt} + y(t) &= k_p u(t) \\ \frac{d^3y(t)}{dt^3} &= \\ &= -\frac{2\xi T_0T + T_0^2}{T_0^2T} \frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{2\xi T_0 + T}{T_0^2T} \frac{dy(t)}{dt} - \frac{1}{T_0^2T} y(t) + \frac{k_p}{T_0^2T} u(t) \\ \frac{d^3y(t)}{dt^3} &= -h_1 \frac{d^2y(t)}{dt^2} - h_2 \frac{dy(t)}{dt} - h_3 y(t) + g_3 u(t) \\ \frac{1}{g_3} \frac{d^3y(t)}{dt^3} &= -\frac{h_1}{g_3} \frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{h_2}{g_3} \frac{dy(t)}{dt} - \frac{h_3}{g_3} y(t) + u(t). \end{aligned}$$

A  $d^3y(t)/(g_3 dt^3)$  jelet három, egymással soros kapcsolást alkotó integráló tagon átvezetve az integrátorok kimenőjelei a folyamat állapotváltozói. A folyamat hatásvázlata ennek megfelelően a 3. ábrán látható.

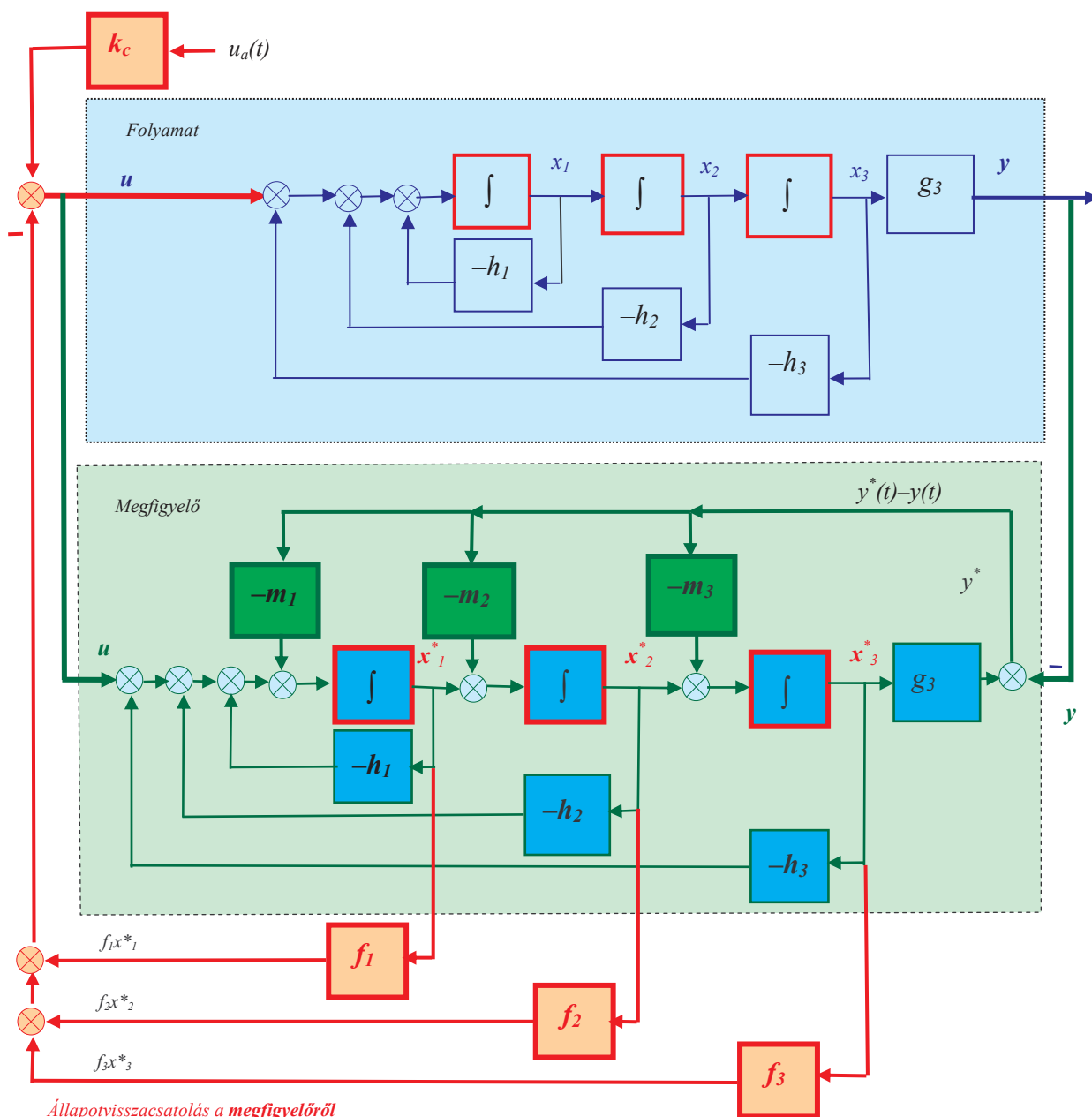
Az állapotegyenlet irányíthatósági kanonikus alakja és a paramétermátrixok a hatásvázlat jelöléseivel:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \frac{dx_3(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_1 & -h_2 & -h_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

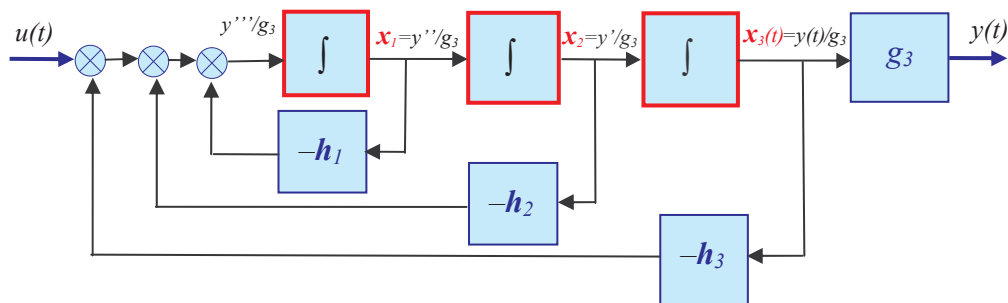
$$y(t) = [0 \quad 0 \quad g_3] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{2\xi T_0T + T_0^2}{T_0^2T} = \frac{2*0,1*1*0,5+1}{1*0,5} = 2,2 \\ h_2 &= \frac{2\xi T_0 + T}{T_0^2T} = \frac{2*0,1*1+0,5}{1*0,5} = 1,4 \\ h_3 &= \frac{1}{T_0^2T} = \frac{1}{0,5} = 2 \\ g_3 &= \frac{k_p}{T_0^2T} = \frac{1}{0,5} = 2. \end{aligned}$$

Folytatjuk!



2. ábra Állapotirányítás megfigyelőről történő visszacsatolással



3. ábra A folyamat irányíthatósági kanonikus alakjának megfelelő hatásvázlata