

# A folyamatműszerezés érzékelői

## Energiaátalakulások szilárd testekben – 4.

Dr. Fock Károly

A mechanikai érzékelők ismertetésének elméleti bevezetéséhez a soron következő folytatásban elsőként a mechanikai feszültség–deformáció kapcsolat lehetséges eseteit ismertetjük. Ezt követően rátérünk a mérőelemek elasztomechanikai tulajdonságainak ismertetésére, amelyek során csak olyan mértékű részletezésre szorítkozzunk, ami elegendő a működés megértéséhez, valamint érthetővé tesszük a különböző tervezési szempontokat, amelyek alapjául szolgálnak a méréstechnikai követelmények teljesítésének.

### Feszültség–deformáció kapcsolatok

A rugalmas anyagok esetén feltételezzük, hogy a deformáció minden egyes komponense lineárisan függ az összes feszültség-komponenstől. A legáltalánosabb esetben ezt a kapcsolatot az alábbi egyenlet írja le:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varphi_{xs} \\ \varphi_{zs} \\ \varphi_{ys} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & s_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{zy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}$$

Az egyenlet nem más, mint a **Hooke-törvény** (Robert Hooke (1635-1703)) legáltalánosabb kifejezése. Az  $s_{ij}$  ( $i, j=1 \dots 6$ ) együtthatók fizikailag az anyag rugalmas tulajdonságaira jellemző anyagállandók, amelyeket rugalmassági együtthatóknak nevezünk, dimenziójuk:  $[m^2/N]$ . Értékük a választott koordináta-rendszer-irányoktól függ, és kifejezik az **anizotrop** testek elasztomechanikai tulajdonságait. A definíció során abból a speciális esetből indultunk ki, hogy az elemi kocka élei a derékszögű koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamosak. A szakirodalom is általában ilyen feltételek mellett közli az anyagjellemzőket. Ettől eltérő eset egy lineáris koordináta-transzformációval mindig kiszámítható.

A deformációtenzor és a feszültségtenzor szimmetriájából következik, hogy az  $s_{ij}$  együtthatókból álló mátrix is szimmetrikus, vagyis csak 21 független elemet tartalmaz, ugyanis  $s_{ij} = s_{ji}$ . A szimmetrián túlmenően az egyenlet együtthatómátrixának struktúrája szoros kapcsolatban van az anyagok kristályszerkezetével. Pl. a triklin-kristályrendszer 21 független rugalmassági együtthatóval jellemezhető, de a kristályszimmetriák a rugalmassági együtthatómátrixot egyszerűsítik. Pl.:

- Hexagonális kristályrendszerek esetén ( $\alpha$ -kvarc) csak az  $s_{11}$ ,  $s_{12}$ ,  $s_{13}$ ,  $s_{14}$ ,  $s_{33}$  és  $s_{66}$ , vagyis 6 db együttható különbözik nullától (feltételezve, hogy a koordináta-tengelyek párhuzamosak a kristálytani tengelyekkel),
- A köbös kristályok (pl. szilícium) rugalmas tulajdonságai pedig mindössze három független adattal ( $s_{11}$ ,  $s_{12}$  és  $s_{44}$ ) leírhatók (a koordináta-tengelyek itt is párhuzamosak a kristálytani tengelyekkel).

Az **izotróp** anyagok estén az elasztomechanikai tulajdonságok függetlenek a választott koordináta-rendszertől, és leírhatók az  $s_{11}$  és  $s_{12}$  rugalmassági együtthatók segítségével az alábbi egyenlet szerint:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varphi_{xs} \\ \varphi_{zs} \\ \varphi_{ys} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(s_{11} - s_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11} - s_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11} - s_{12}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{zy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}$$

Az együtthatómátrix elemeit a műszaki gyakorlatban szokásos az  $E$  rugalmassági tényezővel (*Young*-modulus), valamint a  $\nu$  kontrakciós tényezővel (*Poisson*-tényező) kifejezni:

$$\left. \begin{aligned} s_{11} &= \frac{1}{E} \\ s_{12} &= -\frac{\nu}{E}, \end{aligned} \right\} \text{amivel } 2(s_{11} - s_{12}) = 2\frac{1-\nu}{E} = \frac{1}{G},$$

ahol  $G$  az ún. csúsztató rugalmassági tényező.

Az összefüggésekből megállapítható, hogy az  $E$ ,  $\nu$  és  $G$  tényező közül csak kettő független, a harmadik az előző kettőből számítható. Az  $E$  és  $G$  anyagjellemzők dimenziója:  $[N/m^2]$ . A dimenziótlan  $\nu$  *Poisson*-tényező a rugalmas test erőhatás irányára merőleges, és az erőhatás irányába eső méretváltozásának a hányadosát fejezi ki. A nyúlás keresztirányú méretcsökkenéssel jár együtt, előjele ezért negatív. Rugalmas alakváltozás esetén  $|\nu| < 0,5$ , ami azt jelenti, hogy húzás esetén térfogat-növekedést, nyomás estén térfogat-csökkenést tapasztalunk. (Csak képlékeny alakváltozás estén kapunk állandó térfogatot, ami a  $|\nu| = 0,5$  értéket jelenti.)

### Mérőelemek elasztomechanikai tulajdonságai

Az alábbi fejezet olyan testek rugalmas tulajdonságaival foglalkozik, amelyek fontos szerepet játszanak olyan nemvillamos mennyiségek érzékelésében, amikor nincs mód arra, hogy a mérendő mennyiséget közvetlenül villamos jellé alakítsuk.

Ezekben a mérőeszközökben a jelátalakítási lánc lényeges tagja (esetleg első eleme) egy speciális geometriával kialakított rugalmas test, amely az erők vagy nyomatékok hatására deformálódik. Kimenőjelnek a test valamely pontjának elmozdulását vagy valamelyik felületének deformációját tekintjük.

**Rudak és lemezek helyfüggetlen deformációval**

Elsősorban erő- és gyorsulásmérőkben játszanak fontos szerepet ezek a szerkezeti elemek, amelyekben a mechanikai igénybevétel hatására a nyúlások és szögdeformációk helyfüggetlenek. A lehetséges eseteket a 1. táblázat foglalja össze.

Az első három sor a húzásra (vagy nyomásra) igénybe vett esteket foglalja össze, aszerint különböztetve meg ezeket egymástól, hogy a keresztirányú deformáció nincs korlátozva (1. sor), vagy pedig egy, ill. két irányban a deformáció nem megengedett (2. és 3. sor). A 4. sor egy lemez nyírását szemlélteti  $d \ll l$  és  $d \ll b$  feltétel esetén.

A felsorolt esetek idealizált befogást feltételezve homogén mechanikai feszültséget és deformációt jelentenek. Szilárdságtanilag ezeket egyszerű igénybevételeknek nevezik. Az első három sor mechanikai igénybevétele során csak egyirányú  $\sigma$  feszültség keletkezik, ezt hívják egytengelyű feszültségállapotnak. A valóságban az idealizált igénybevétel nem valósítható meg, a befogás közvetlen környezete mindig összetett mechanikai igénybevételű; de a befogástól elegendő távolságban az egytengelyű igénybevétel feltételezése már jogos (Saint Venant-elv).

**Kör keresztmetszetű rudak és csövek csavarása**

Forgatónyomatékok mérésének alapvető fontosságú eleme az átmérőjéhez képest hosszú, kör keresztmetszetű rúd és cső.

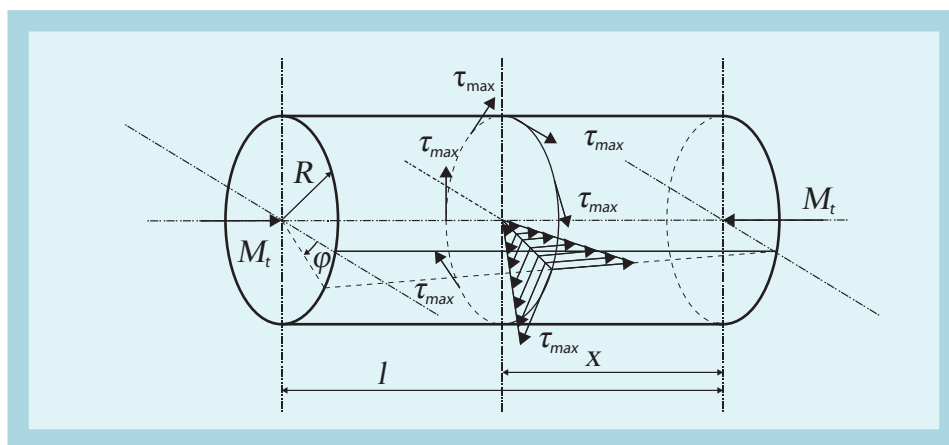
A kör keresztmetszetű, egyenes rúd csavarásra van terelve, ha két, keresztmetszetében a rúd hossz tengelye körül forgató erőpár, az úgynevezett csavarónyomaték terheli. A csavarónyomaték okozta alakváltozás abban nyilvánul meg, hogy a rúd keresztmetszetei egymáshoz képest a rúd hossz tengelye körül elfordulnak. Az 1. ábra jelöléseivel az  $M_t$  csavarónyomaték és a  $\varphi$  szög közötti összefüggés (a mérőelem statikus karakterisztikája):

$$M_t = \frac{\pi R^4 G}{2l} \varphi$$

A csavarás a rúd tengelyére merőleges síkban  $\tau$  nyírófeszültséget hoz létre, amelynek nagysága a tengelytől mért távolsággal line-

Sor-szám	Terhelési eset	Peremfeltételek	Feszültségek és deformációk	
			Anizotróp test	Izotróp test
1		$F = \sigma_z A$ $\sigma_x = \sigma_y = 0$ $\zeta = d \varepsilon_z$	$\varepsilon_z = s_{33} \sigma_z$	$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z$
2		$F = \sigma_z A$ $\sigma_x = 0 \quad \varepsilon_y = 0$ $\zeta = d \varepsilon_z$	$\varepsilon_z = s_{33} \left[ 1 - \left( \frac{s_{23}}{s_{33}} \right)^2 \right] \sigma_z$	$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (1 - \nu)^2 \sigma_z$
3		$F = \sigma_z A$ $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ $\zeta = d \varepsilon_z$	$\sigma_z = c_{33} \varepsilon_z$	$\sigma_z = \frac{E(1-\nu) \varepsilon_z}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
4		$F = A \tau_{xy}$ $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$ $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$ $\zeta = d \varphi_{xs}$	$\tau_{xy} = \frac{1}{s_{44}} \varphi_{xs}$	$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varphi_{xs}$

1. táblázat Rudak és lemezek elasztomechanikai alapösszefüggései különböző peremfeltételek esetén



1. ábra Kör keresztmetszetű rúd csavarása

árisan változik, maximális értékét a felületen éri el:

$$\tau_{max} = \frac{2}{R^3 \pi} M_t$$

A dualitásnak megfelelően az átmérő síkokban ugyanakkora feszültségek ébrednek, mint a keresztmetszet síkjában.

A felületen kialakult feszültségállapot által létrehozott deformációt szemlélteti a 2. ábra. Az  $M_{tx}$  csavarónyomaték a henger felületén levő négyzetet rombuszá alakítja, ami egyenértékű a 45°-kal elforgatott  $x'-y'$  koordináta-rendszerben egy  $\sigma_x$  húzó és egy  $-\sigma_y$  vele abszolút értékben azonos nagyságú  $-\sigma_y$  nyomófeszül-

ség hatásával. Természetesen ezekben az irányokban  $\varepsilon'_x$  és  $\varepsilon'_y$  nyúlásokat érzékelünk (lásd a rombusz átlóinak a négyzet átlóihoz hasonlított változását).

**Megjegyzés:** A csúsztatófeszültségek húzó- és nyomófeszültségekre történő felbontásának a további jelátalakítási folyamat szempontjából van nagy jelentősége. Ezzel a felismeréssel ugyanis megoldható a differenciál kialakítású, nyúlásmérő ellenállásokból felépített, kiegyenlítettlen hídkapcsolások alkalmazása, ami kedvező érzékenységi és zavarelhárítási tulajdonsággal rendelkezik.

A **körgyűrű keresztmetszetű egyenes rúd (cső)** a csavaráskor úgy viselkedik, mint a tömör rúd, a csúsztatófeszültségek merőlegesek a sugárra és lineárisan változnak, de természetesen csak ott ébredhetnek, ahol anyag is van. Az  $R_k$  külső és  $R_b$  belső sugarú csőben a  $\tau$  csúsztatófeszültség maximuma:

$$\tau_{max} = \frac{2R_k}{\pi(R_k^4 - R_b^4)} M_t$$

és az  $l$  hosszúságú rúd két végkeresztmetszetének  $\varphi$  elfordulási szöge pedig:

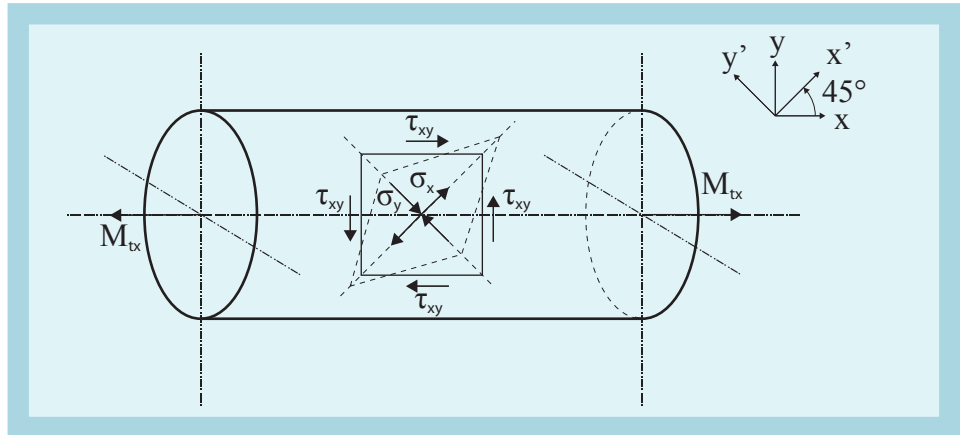
$$\varphi = \frac{2l}{\pi(R_k^4 - R_b^4)} M_t$$

**Hajlított rudak**

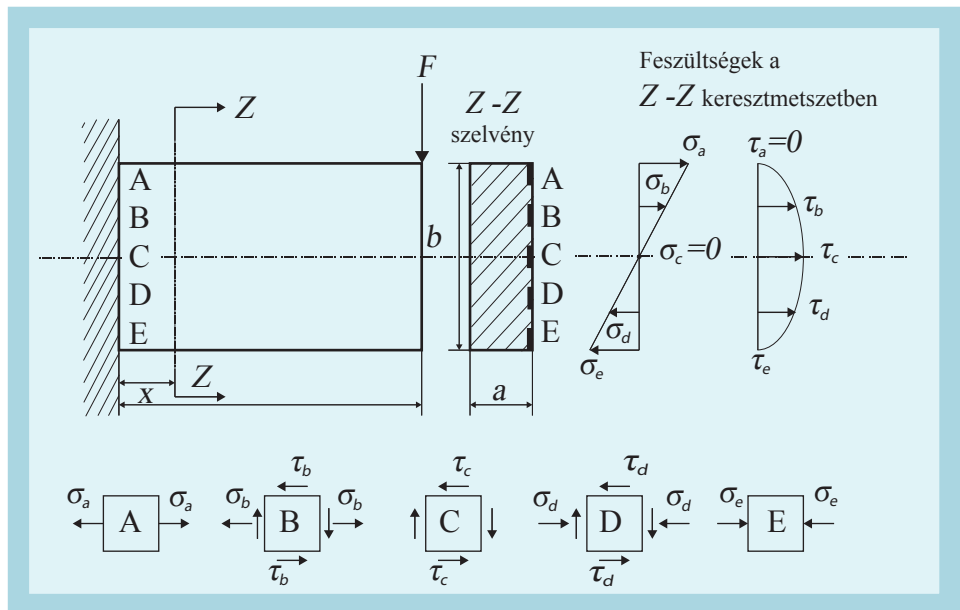
Erő- és gyorsulásmérés során nagyon gyakran alkalmazott mérőelem a hajlításra igénybe vett rúd. A 2. táblázat összefoglalja az egyik oldalon befogott tartó (konzol) és a kéttámaszú tartó koncentrált  $F$  erővel történő terhelése során kialakult deformációkat, amelyek egyrészt a rudak  $\zeta(x)$  lehajlását, másrészt a felületen kialakult  $\varepsilon(x)$  nyúlást jelentik.

2. táblázat Hajlított rudak deformációi

	$\zeta(x)/\zeta_0, \varepsilon(x)/\varepsilon_0$	$\zeta_0$	$\varepsilon_0$
	$\frac{\zeta(x)}{\zeta_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^2 \left( 3 - \frac{x}{l} \right)$ $\frac{\zeta^*(x)}{\zeta_0} = 1 - \frac{3}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^3$ $\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{x}{l}$	$\frac{\zeta_0}{F} = \frac{4l^3}{Ebh^3}$	$\frac{e_0}{\zeta_0} = \frac{3}{2} \frac{h}{l^2}$
	$\frac{\zeta(x)}{\zeta_0} = \left( \frac{x}{l} \right)^2 \left( 3 - 2 \frac{x}{l} \right)$ $\frac{\zeta^*(x)}{\zeta_0} = 1 - 3 \left( \frac{x}{l} \right)^2 + 2 \left( \frac{x}{l} \right)^3$ $\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_0} = 1 - 2 \frac{x}{l}$	$\frac{\zeta_0}{F} = \frac{l^3}{Ebh^3}$	$\frac{e_0}{\zeta_0} = 3 \frac{h}{l^2}$



2. ábra Nyírófeszültség felbontása normálfeszültségekre a koordináta-rendszer 45°-os elforgatásával



3. ábra Egyik végén befogott, a másikon  $F$  erővel terhelt rúd befogástól „távoli” keresztmetszetében kialakult, összetett feszültségi állapot

Fontos megjegyezni, hogy a felületen kialakult  $\varepsilon(x)$  nyúlások az  $F$  erő támadáspontjától mért távolság függvényei. Ezek a deformációk az  $F$  erőből számítható hajlítónyomatékok következtében

keletkeznek, és azonos  $x$  távolságban a  $b$  szélességű és  $h$  magasságú, téglalap keresztmetszetű tartó alsó és felső felületén abszolút értékük egyenlő, de előjelük különbözik.

Az erőmérési gyakorlatban kiemelt jelentősége van a 2. táblázat befogott tartójának. Az  $F$  erő által okozott hajlítás nyírással párosul (összetett mechanikai igénybevétel), és az ilyen módon igénybe vett rúdban  $\sigma$  és  $\tau$  feszültségek is ébrednek. A mechanikai feszültségek eloszlását a 3. ábra szemlélteti. Az ábrából látható, hogy – a befogástól mért  $x$  távolságban – a  $\sigma$  feszültségek nagysága a felületeken maximális, de a két oldalon ellenkező előjelű, a középső rétegben (semleges réteg) azonban zérus értékű, változása a tartó magassága mentén lineáris. A  $\tau$  csúsztató feszültség ezzel szemben a tartó keresztmetszetének magassága mentén parabolikus eloszlású, a felületeken zérus, a semleges rétegben viszont maximális értéket vesz fel. A  $\sigma$  feszültséget az  $M_h = F(l-x)$  helyfüggő hajlítónyomaték hozza létre. Maximális értéke:

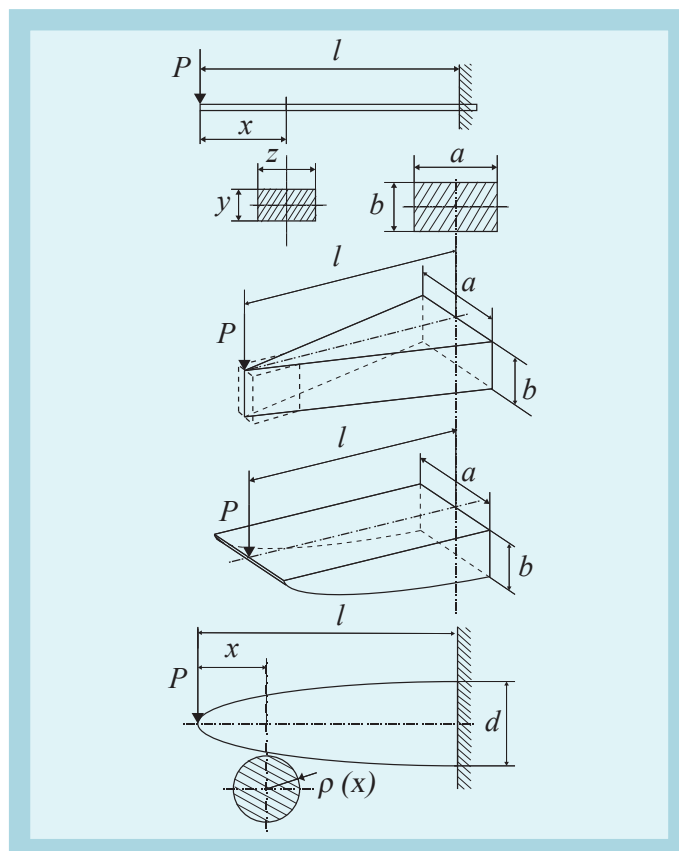
$$\sigma_{\max}(x) = \frac{6F}{ab^2}(l-x)$$

A  $\tau$  csúsztató feszültség azonban minden keresztmetszetben – az erő támadáspontjától függetlenül – azonos, mivel a nyíróerő a hossz tengely mentén állandó.

**Megjegyzés:** Ennek a felismerésnek a nyúlásmérő ellenállásos erőmérők tervezésénél van jelentősége. A nyúlást ugyanis nem az alsó, ill. felső felületen, hanem a semleges szál közelében a maximális  $\tau$  feszültségek helyén mérik (az előző pontban megismert 45°-os elforgatással a tartónak az erő vektorával párhuzamos hosszirányú felületén: csapcella kialakítás). Az erőmérő kimenőjele független az erő támadáspontjától.

A  $\sigma(x)$  helyfüggő feszültség helyfüggő  $\varepsilon(x)$  nyúlást is eredményez. Ha ez zavaró, akkor az  $\varepsilon$  nyúlás állandóságát a helyfüggetlen  $\sigma$  feszültség megteremtésével is el lehet érni, aminek megoldása a tartó  $a$  szélességének, vagy  $b$  magasságának, ill. forgástest esetén a keresztmetszet  $\rho$  sugarának megfelelően kialakított változása a rúd tengelye mentén (4. ábra).

Amennyiben az 3. ábrán látható egyenszilárdságú rudak kialakítása nehézségekbe ütközik, előnyösen választható megoldás



4. ábra Ugyanarra a terhelésre az egyenszilárdságú tartókat különböző alakúra készíthetjük

az  $x$ -től független  $\tau_c$  csúsztató feszültség felhasználása mérésre a 2. ábrán látható elvnek megfelelően.

A 2. táblázatban feltüntetett kéttámaszú vagy két végén befogott tartó a különböző mérlegkonstrukcióknál játszik fontos szerepet. A merev befogásnak a hiszterézishiba csökkentésében van jelentősége.

(Folytatjuk!)

editor@magyar-elektronika.hu