

# A folyamatműszerezés érzékelői

## Energiaátalakulások szilárd testekben – 7.

Dr. Fock Károly

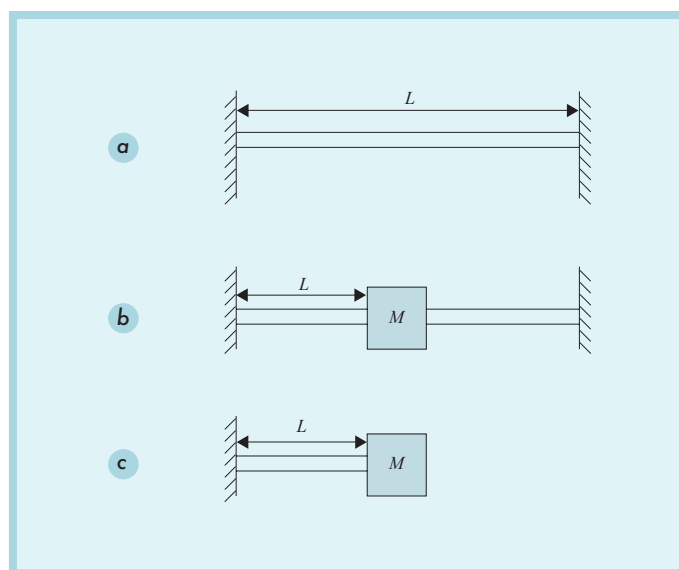
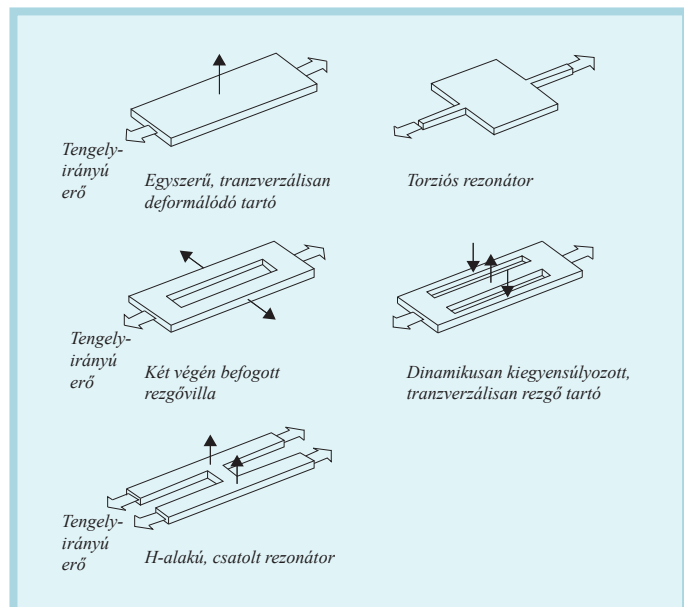
A mechanikai érzékelők családját ismertető cikksorozat alábbi folytatásban egy elméleti összefoglaló keretében a rezgőrendszerű érzékelőcsalád egy új típusának a működési mechanizmusát tárgyaljuk. Az érzékelők működésének lényege, hogy egy elektromechanikai oszcillátor rezonanciafrekvenciájának meghatározó részét képezik, amely oszcillátor a mérendő fizikai mennyiség hatására elhangolódik.

### Mechanikai rezonátorok

A mechanikai rezonátor típusú érzékelők a mérendő mechanikai bemenőjelet egy mechanikai rezgőrendszer rezonanciafrekvenciájának megváltozásává alakítják át. Meg kell jegyezni, hogy a frekvencia az oszcillációnak csak egy paramétere, az amplitúdó, a fázisszög és a csillapítás is tekinthető lenne kimeneti mennyiségnek. Hogy ezeknél az érzékelőknél mégis a frekvenciát választják kimenőjelnek, annak az a praktikus magyarázata, hogy a frekvenciajel közvetlenül csatlakoztatható a digitális jelfeldolgozó elektronikához, és nincs szükség A/D-átalakítóra. További előny, hogy a frekvenciajel a pontosság romlása nélkül nagy távolságra továbbítható. Meg kell azonban jegyezni, hogy a felsorolt előnyök nem jelentik egyben az általában megkövetelt nagy mérési pontosságot, a jó ismétlődőképességet, a kis hiszterézist stb. Ezek a méréstechnikai tulajdonságok a speciális érzékelő-kialakításoktól és nem a jel típusától függenek.

Az érzékelők rezgőeleme – a kronológiai sorrendet is figyelembe véve – legelőször az acélhúr, a jó minőségű rugóanyagból készült, vékony falú zárt henger és a hangtanból jól ismert hangvilla volt. A mikroelektromechanikai technológia rohamos fejlődése azonban igen sokféle – többnyire Si-ből kialakított – rez-

1. ábra Si-egykrisztályból kialakított rezgőelemek

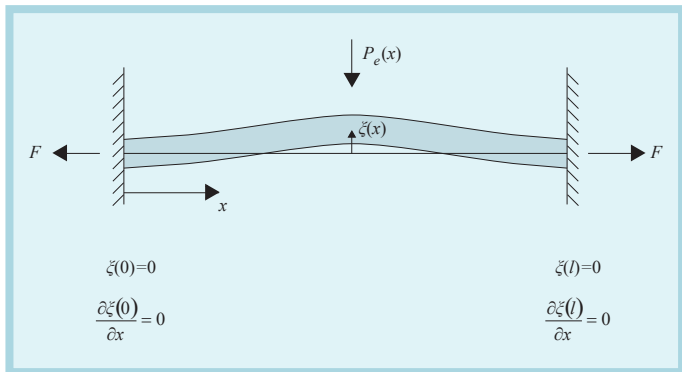


2. ábra Rezonátorok alaptípusai

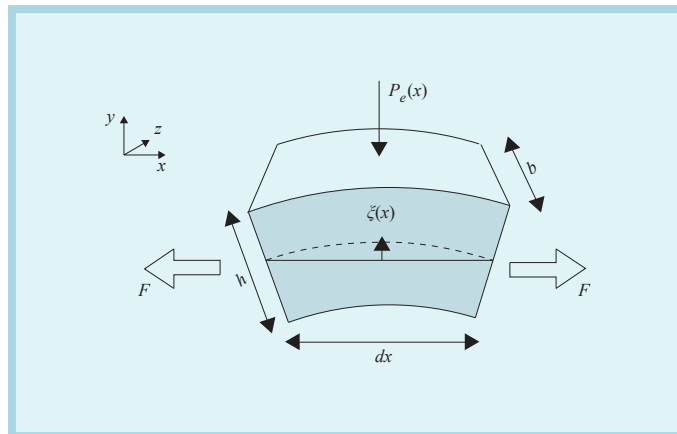
- a) Két végén befogott tartó
- b) Két végén befogott tartó közepén kiegészítő  $M$  tömeggel
- c) Konzol, a végén egy kiegészítő  $M$  tömeggel

gőlemet hozott létre (1. ábra). A hajlításnak kitett prizmatikus keresztmetszetű, egyszerű tartó, a csavaró igénybevételnek kitett torziós rezonátor, a két végén befogott rezgővilla, a három rezgőelemmel kialakított, dinamikusan kiegyensúlyozott, transzverzálisan rezgő tartó, a H-alakú, csatolt rezonátor csupán egy-egy kiragadott példa a sokféle rezgőelem közül.

Figyelmesebben szemlélve a felsorolt példákat, megállapítható azonban, hogy azok a 2. ábrán látható típusok valamelyikével modellezhetők. A felsorolt érzékelők mindegyike – rugalmas szilárdtestről lévén szó – többféle, vagyis transzverzális, longitudinális, torziós vagy felületi rezgésre is képes. A felsorolt struktúrák végtelen szabadságfokúak (a működési frekvencián általában elosztott paraméterű rendszerek), és emiatt a rezgés bármelyik típusára végtelen számú rezonanciájuk vagy rezgési módjuk lehet. Általában az a tapasztalat, hogy az érzékelők rezgőelemei azonban csak egy domináns rezgési típussal rendelkeznek. Ennek a rezgési módnak a rezonanciafrekvenciája függ a mérendő mennyiségtől, amelyik az érzékelő mechanikai feszültségállapotát, tömegét, csillapítását vagy alakját változtatja meg.



3. ábra Két végén befogott prizmatikus tartó a peremfeltételekkel



4. ábra Elemi hosszúságú tartószakasz dinamikus viszonyai

**Befogott végű, tranzverzálisan rezgő tartó**

Mivel a rezonátor típusú érzékelőelemek többsége tranzverzálisan rezgő, prizmatikus tartóval modellezhető (3. ábra), ezért a továbbiakban ennek az érzékelőnek a tulajdonságait vizsgáljuk részletesebben. A prizmatikus tartóra az jellemző, hogy hajlítómerevsége független a hosszirányú koordinátától. A további megkötések a peremfeltételekre vonatkoznak:

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= 0 \\ \frac{\partial \zeta(0)}{\partial x} &= 0 \\ \zeta(l) &= 0 \\ \frac{\partial \zeta(l)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a vizsgálat során a tartó végpontjai helyben maradnak, és végeik befogottak, vagyis a semleges szál érintői a befogásoknál vízszintesek maradnak. Az egyenletekben  $\zeta(x)$  jelenti a tartó semleges szála nyugalmi állapotól mért kitérését.

**Megjegyzés**

Az egyik végén befogott, másik végén szabad tartó (konzol) peremfeltételei a következők lennének:

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= 0 \\ \frac{\partial \zeta(0)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \zeta(l)}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^3 \zeta(l)}{\partial x^3} &= 0 \end{aligned}$$

Ha a 3. ábrán látható tartóból kivágunk egy  $dx$  hosszúságú elemet (4. ábra), akkor az elemre ható erők egyensúlyára a hely szerint negyedfokú és az idő szerint másodfokú lineáris, inhomogén, parciális differenciálegyenlet írható fel<sup>1</sup> (Euler – Bernoulli-egyenlet). Kis tranzverzális kitérést feltételezve a viszkózusan csillapított prizmatikus tartóra tengelyirányban az

$F$  [N] mérendő- és rá merőlegesen a  $P_e(x, t)$  [N] gerjesztőerő hat. A differenciálegyenlet tehát:

$$\begin{aligned} \frac{EI}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^4 \zeta(x, t)}{\partial x^4} - F \frac{\partial^2 \zeta(x, t)}{\partial x^2} + \rho bh \frac{\partial^2 \zeta(x, t)}{\partial t^2} + \\ + c \frac{\partial \zeta(x, t)}{\partial t} = \frac{P_e(x, t)}{l} \end{aligned}$$

ahol a jelölések jelentése az alábbi:

- $\zeta(x, t)$  a semleges szál tranzverzális deformációja [m],
- $I=bh^3/12$  a keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka [m<sup>4</sup>],
- $c$  a viszkózus csillapítási tényező [Ns/m<sup>2</sup>],
- $b$  a tartó szélessége [m],
- $h$  a tartó vastagsága [m],
- $l$  a tartó hossza [m],
- $E$  a Young-féle rugalmassági modulus [N/m<sup>2</sup>],
- $\nu$  a Poisson-tényező [-] és
- $\rho$  a tartó anyagának a sűrűsége [kg/m<sup>3</sup>].

A differenciálegyenlet bal oldalának első két tagja a tartó rugalmas tulajdonságait írja le. Az  $EI$ -szorzat elnevezése: hajlítószilárdság. A harmadik tag a tartó tehetetlenségére jellemző, a  $\rho bh$ -szorzat pedig a tartó hosszegységre eső tömege. Az egyszerűség kedvéért a sebességarányos csillapításon kívül más típusú súrlódóerőt nem veszünk figyelembe. A jobb oldalon feltüntetett  $P_e(x, t)$  erő tartja a tartót mozgásban, a gerjesztés fajtáit később tárgyaljuk.

A tartón kialakult rezonanciafrekvencia és az axiális erő közötti kapcsolat leírásához meg kell oldani a differenciálegyenletet. Analitikus módszer hiányában a megoldás vagy numerikus, vagy közelítő lehet. Ennek érdekében, hogy a megoldás további elemzéséhez analitikus megoldást kapjunk, célszerű egy közelítő megoldást választani. Pl. a Rayleigh-féle, energiamódszeren alapuló közelítő megoldással<sup>2</sup> az alábbi eredményt kapjuk:

$$\omega_n(F) = \omega_n(0) \sqrt{1 + \gamma_n \frac{F}{Ebh} (1-\nu^2) \left(\frac{l}{h}\right)^2}$$

<sup>1</sup> Timosenko S. P. – D. H. Young – W. Werner: Vibrations problems in engineering, John Wiley & Sons 4<sup>th</sup> ed. 1974, chapter 5.

<sup>2</sup> Shames I. H. – C. I. Dym: Energy methods and finite elements methods in structural mechanics, McGraw-Hill, New York, 1985, chapter 7.

ahol

$$\omega_n(0) = \frac{\alpha_n^2 h}{\sqrt{12} l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$$

jelenti az  $F=0$  erőhöz tartozó  $n$ -edik rezonanciafrekvenciát.

A megoldásban  $n$  jelöli a tartón kialakuló állóhullámok rendszámát,  $\alpha_n$  és  $\gamma_n$  pedig az  $n$  rendszámtól függő együtthatókat az alábbi táblázat szerint:

$n$	$\alpha_n$	$\gamma_n$
1	4,730	0,2949
2	7,834	0,1453
3	11,00	0,08119
4	14,14	0,05155
5	17,28	0,03553

Az  $\omega_n(F)$  függvény közelítésének pontossága jobb, mint 0,5%, ha teljesül a

$$\frac{\gamma_n F l^2 (1-\nu^2)}{12EI} < 1 \text{ feltétel}$$

Az  $\omega_n(F)$  függvény nemlineáris (négyzetgyökös), linearitási hibája és érzékenysége is erősen függ az  $l/h$  hányadostól. A technika mai szintjén  $l/h$  maximális értéke 100, esetleg elérhető határértéke 1000 lehet. Növelését az érzékenység javítása indokolja.

Az  $\omega_n(F)$  függvények (statikus karakterisztikák) ábrázolásához – a konkrét méretektől való függetlenítés érdekében – viszonyítási alapként tekintünk az

$$\omega_1(0) = \frac{\alpha_1^2 h}{\sqrt{12} l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$$

$F=0$  erőhöz tartozó, alapharmonikus rezonanciafrekvenciát és a

$$\sigma_v = \frac{E}{(1-\nu^2) \left(\frac{l}{h}\right)^2}$$

vonatkoztatási feszültséget. Mivel az  $F/bh$  hányados jelenti az érzékelőben a mérendő  $F$  erő hatására keletkező  $\sigma$  feszültséget, a statikus karakterisztikák a fenti jelölésekkel az

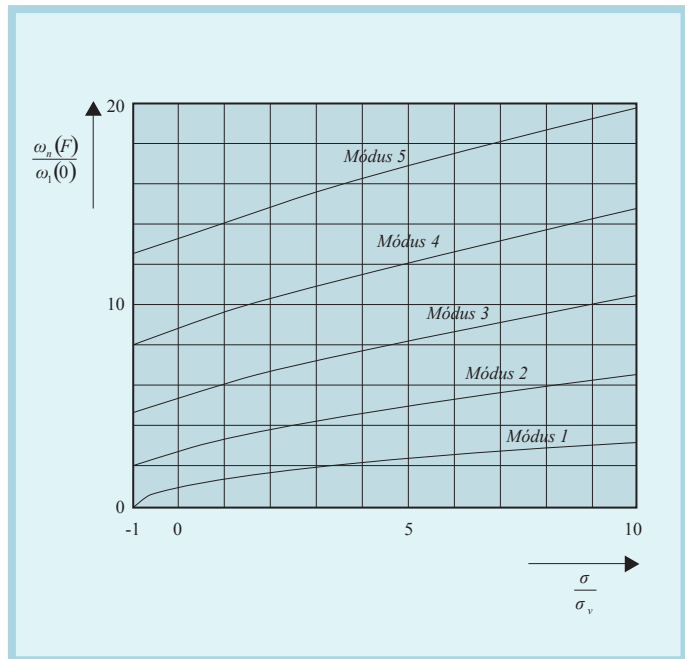
$$\frac{\omega_n(F)}{\omega_1(0)} = \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^2 \sqrt{1 + \gamma_n \frac{\sigma}{\sigma_v}}$$

alakba mennek át, amelyeket különböző  $n$  értékekre a 5. ábrán tüntettünk fel<sup>3</sup>.

**Megjegyzés**

Természetesen más közelítő feltételezésekkel más megoldást kapunk<sup>4</sup>.

<sup>3</sup> M. Elwenspoek – R. Wiegink: Mechanical Microsensors, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 2001, 9. chapter



5. ábra A két végén befogott prizmatikus rezonátor statikus karakterisztikái a rezgés különböző módusainál

Az irodalmi forrás szerint:

$$\omega_n(F) = \omega_n(0) \sqrt{1 + \frac{1}{a^3} \tanh\left(\frac{a}{2}\right) \left[ a \tanh\left(\frac{a}{2}\right) - 2 \right] \frac{l^2 F}{2EI}}$$

ahol

$$\omega_n(0) = \frac{a^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho bh}} \quad \text{és} \quad a = \frac{1+n}{2}$$

A többi jelölés jelentése megegyezik az előbbieken alkalmazott jelölésekkel. Látható, hogy az eredmény az előbbihez nagyon hasonló. Eltérés mindössze a rezgés módusainak a figyelembevételében van.

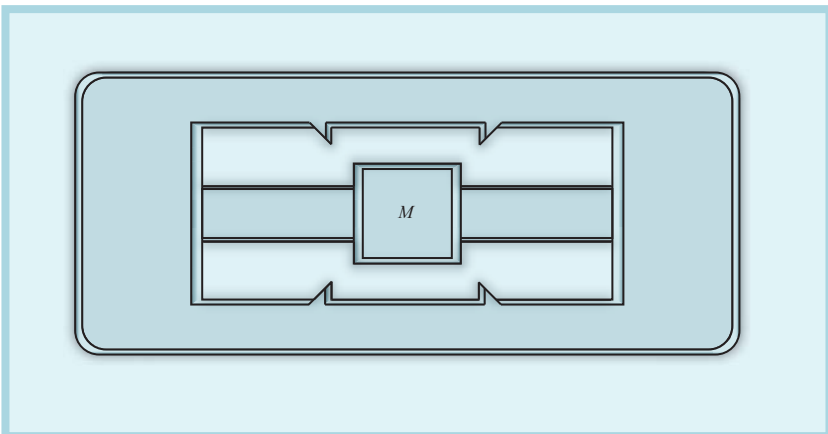
A statikus karakterisztikát befolyásoló tényezők közül a levegő csillapító hatását, valamint a hőmérsékletet kell megemlítenünk.

**Levegővel csillapított, tranzverzálisan rezgő tartó (nyomásfüggés)**

Az eddigiekben hallgatólagosan feltételeztük, hogy a rezgő tartó vákuumban van. Mivel – mint a későbbiekben látni fogjuk – a folyamatos működés fenntartása érdekében a súrlódási veszteségek kompenzálásához külső forrásból energiapótlásra van szükség, a valóságos viszonyok között a rezgést végző rúd-nak a környezetében lévő gázmolekulák kiegészítő tömegét is rezgésbe kell hoznia, azt gyorsítani kell. A vizsgálathoz  $F=0$  terhelésmentes esetet tételezünk fel, és figyelmen kívül hagyjuk a csillapítást. Ezek a hatások ugyanis a tömegtől (sűrűségtől) függetlenek. Ilyen körülmények között a tartó rezgését leíró homogén differenciálegyenlet

$$\frac{EI}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^4 \zeta(x, t)}{\partial x^4} + (\rho bh + m) \frac{\partial^2 \zeta(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

<sup>4</sup> W. Göpel – J. Hesse – J. N. Zemel: Sensors A comprehensive Survey, Weinheim, New York, Basel, Cambridge, Tokyo, vol. 7. (Mechanical Sensors) 12. chapter



**A hőmérséklet hatása**

A rezonanciafrekvencia hőmérsékletfüggésének két oka van. Egyrészt a hőtágulásból kifolyólag megváltoznak a geometriai méretek, másrészt megváltoznak a rugalmassági együtthatók.

Analitikus kifejezésekhez csak konkrét kialakítások elemzésével lehet eljutni. A hőmérsékletfüggés vizsgálatához induljunk ki az 6. ábrán látható, Si-egykristályból készült érzékelőből, amelyik az eddig vizsgált egyszerű, befogott tartótól abban különbözik, hogy közepén van egy  $M$  nagyságú tömeg. Ennek a rezgőrendszernek az alarezonancia-frekvenciáját az

6. ábra Si-ból készült, két végén befogott prizmatikus tartó, közepén egy  $M$ -nagyságú tömeggel

alakú lesz, ahol  $m$  [kg/m] jelöli a mozgásba hozott gáz hosszegységre eső tömegét. Értékére a szakirodalomban különböző közelítések találhatók Pl. az egyik legegyszerűbb közelítés<sup>5</sup>:

$$m = \frac{\pi \rho_g b^2}{2} ,$$

ahol  $\rho_g$  [kg/m<sup>3</sup>] jelöli a gáz sűrűségét, amely a

$$\rho_g = \frac{p}{RT}$$

általános gáztörvényből számítható ( $R$  [J/K·kg] az egyetemes gázállandó és  $T$  [K] az abszolút hőmérséklet). A gondolatmenetből következik, hogy izotermikus viszonyok között a rezgő tartó rezonanciafrekvenciái a környező gáz (levegő) nyomásának a függvényei, amelyeknek analitikus kifejezése a behelyettesítés után:

$$\omega_n(0) = \frac{\alpha_n^2 h}{\sqrt{12} l^2} \sqrt{\frac{Ebh}{\left(\rho bh + \frac{\pi b^2}{2RT} p\right) (1-\nu^2)}} .$$

Látható, hogy a környezeti nyomás növekedésével a rezonanciafrekvenciák csökkennek, mértékükre szolgáljon a szakirodalomból származó adat: kvarcból készült rezgő tartó  $n=1$ -hez tartozó rezonanciafrekvenciájának atmoszférikus nyomás környezetében mérhető nyomásérzékenysége 0,37 ppm/mbar<sup>6</sup>. A konstrukciós kialakításoknál ezt a környezeti hatást célszerű figyelembe venni.

**Megjegyzés**

A sűrűség-, ill. a nyomásfüggés ismertetett hatásmechanizmusa egyébként alkalmas arra is, hogy gázok (levegő) folyamatos sűrűség- és nyomásméréséhez érzékelőket alakítsunk ki. Erre példákat az alkalmazástechnikai fejezetben láthatunk.

<sup>5</sup> Christen, M.: Air and gas damping of quartz tuning forks, Sensors and Actuators 4 (1983) p. 555.

<sup>6</sup> Kokubun, K. – Hirata, M. – Murakami, H. – Toda, Y.: Frequency dependence of a quartz oscillator on gas pressure, J. Vac. Sci. Technol. A3 (6) 1985 p. 2184.

$$\omega_1(0) = \sqrt{\frac{24EI}{M \left(\frac{l}{2}\right)^3}}$$

egyenlet fejezi ki, amelynek hőmérsékletfüggését implicit formában ( $I=bh^3/12$  behelyettesítésével) az

$$\omega_1(0, \vartheta) = \sqrt{\frac{16}{M} E(\vartheta) \frac{b(\vartheta)h^3(\vartheta)}{l^3(\vartheta)}}$$

alakban írhatjuk fel. A kifejezés egy  $\vartheta_0$  hőmérséklet körüli kis változásokra jobban áttekinthető alakra is hozható. A részletesszámítások mellőzésével a rezonanciafrekvencia hőmérséklet-érzékenysége ( $F=0$  erőnél):

$$\frac{d\omega_1(0, \vartheta)}{d\vartheta} = \frac{1}{2} \omega_1(0, \vartheta_0) (\alpha + \beta) ,$$

ahol

$\alpha$  az izotrópnak feltételezett lineáris hőtágulási együttható és

$$\beta = \frac{1}{E(\vartheta_0)} \frac{dE(\vartheta)}{d\vartheta}$$

a  $\vartheta_0$  hőmérséklet környezetében az  $E$  (Young-féle) rugalmassági modulus hőmérsékleti együtthatója.

Si-egykristály esetén  $\alpha \approx 2,33 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^\circ\text{C}$  és  $\beta \approx -70 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^\circ\text{C}$ , amiből megállapítható, hogy a rugalmassági modulus hőmérsékletfüggése lényegesen nagyobb szerepet játszik a rezonanciafrekvencia driftjében, mint a geometriai adatok megváltozása.

A folytatásban áttekintjük a használatos oszcillátorok típusait, majd alkalmazási példaként megvizsgáljuk a rezgőhúros erőmérők, a rezgőhengeres nyomásmérők és sűrűségmérők különböző típusait, továbbá kitérünk az áramlásmérési gyakorlatban egyre nagyobb szerepet játszó Coriolis-áramlásmérők egyik korszerű típusának az ismertetésére is.

(Folytatjuk!)

editor@magyar-elektronika.hu